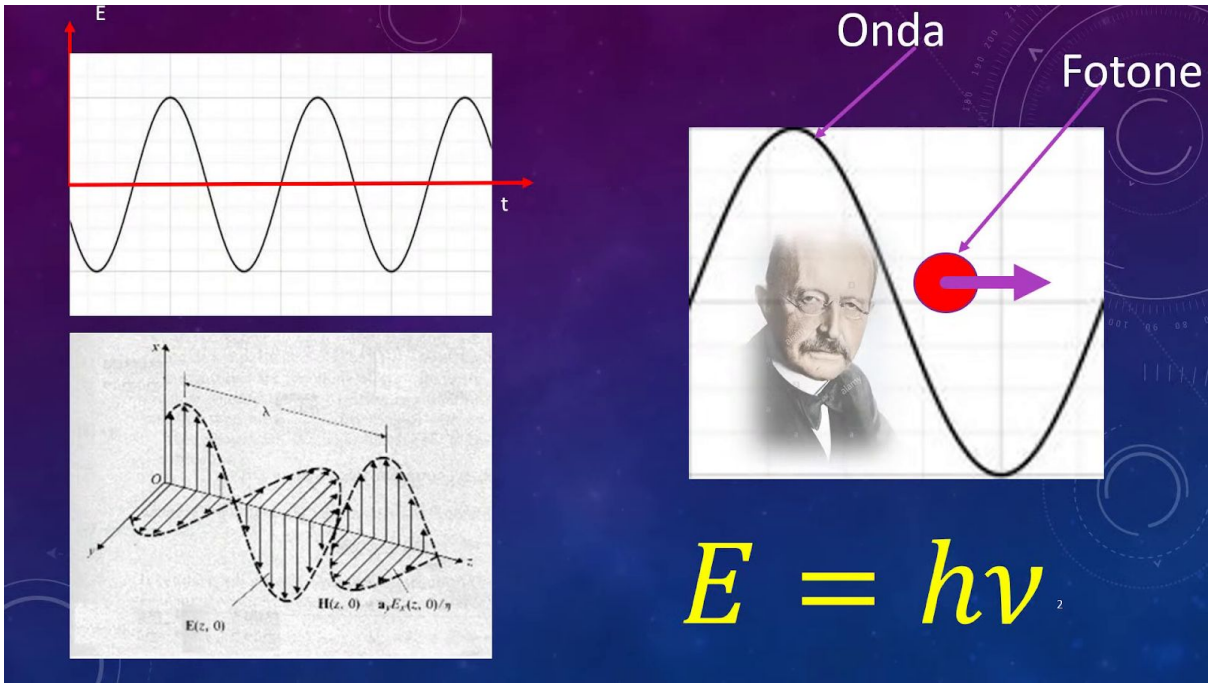
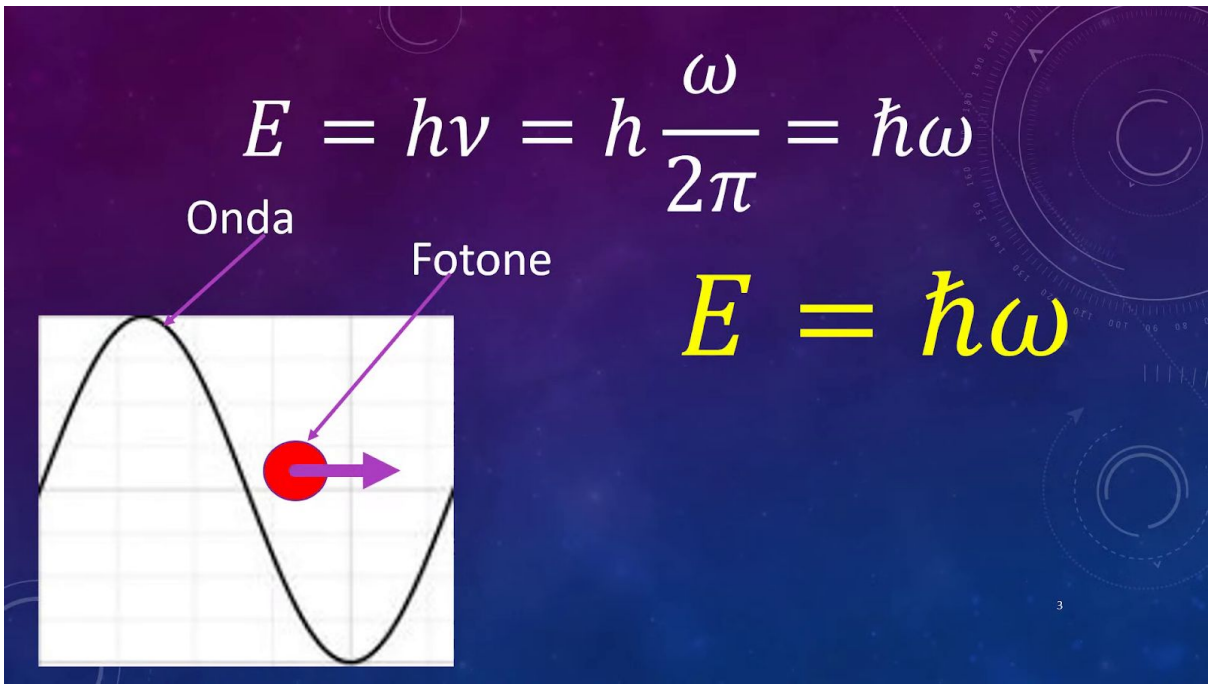
Elettrone: un nuovo modello di Francesco Ferrara.
Ultimo aggiornamento trascrizione 2019-12-01.

[00:01] Buongiorno. Mi chiamo Francesco Ferrara, sono un insegnante di fisica. In questo video presenteremo un nuovo modello dell'elettrone. Il video è tratto da un documento redatto da alcuni fisici Italiani, e quindi ci occuperemo, sostanzialmente, della particella elementare più nota: l'elettrone, chiedendoci cosa sia veramente l'elettrone, quali siano le sue dimensioni, quale sia l'origine del momento magnetico, quale sia l'origine della massa e delle leggi di Newton, quale sia l'origine della massa relativistica, cosa sia lo spin.



[00:47] Partiamo da un'onda elettromagnetica. In alto abbiamo un campo elettrico che varia nel tempo: sappiamo che la lunghezza tra due creste è il periodo dell'onda elettromagnetica. In basso abbiamo un grafico che mostra l'andamento nello spazio, quindi un diagramma spaziale dell'onda; in un diagramma spaziale la distanza fra due creste è la lunghezza d'onda.

[01:13] Ecco qui: abbiamo Max Planck, il quale praticamente risolve un annoso problema della fisica agli inizi del '900, che era quello della radiazione del corpo nero. Non mi dilungo a parlare circa la radiazione del corpo nero, perché sostanzialmente non è l'argomento di cui ci occuperemo. In ogni caso Planck, per risolvere il problema del corpo nero introduce il concetto di fotone. Cioè introduce, appunto, il fotone, dicendo che l'interazione tra la luce e la materia avviene per pacchetti discreti di energia. Ciascun pacchetto di energia è detto fotone e trasporta un'energia direttamente proporzionale alla frequenza, e la costante di proporzionalità è la costante di Planck. Ecco la relazione: la famosa $E = hv$, dove E è l'energia, h la costante di Planck, v è la frequenza della radiazione.



[02:15] Adesso riprendiamo ancora l'immagine della nostra onda elettromagnetica a cui è associato un fotone. La relazione $E = h\nu$, se ν lo riguardiamo come $\omega / 2\pi$, $h / 2\pi$ diventa $\hbar$, la cosiddetta costante di Planck ridotta. Di conseguenza, la relazione di Planck diventa $E = \hbar\omega$.

UNITÀ NATURALI

Nel Sistema delle unità naturali si ha: $\hbar = c = 1$ inoltre $4\pi\varepsilon_0 = 1$. Le altre grandezze fisiche si esprimono come potenze, positive, negative o nulle dell'elettronvolt.

4

[00:47] Bene, al fine di comprendere meglio il modello è necessario introdurre le unità naturali. Sostanzialmente nel sistema delle unità naturali la costante di Planck ridotta $\hbar$ è uguale alla velocità della luce nel vuoto, ed è assunta unitaria. Quindi $\hbar$ sarà uguale ad 1 e c uguale a 1. Inoltre, anche la costante $4\pi\varepsilon_0$, dove ε_0 è la costante dielettrica del vuoto, è uguale a 1. Facendo queste imposizioni, le altre grandezze fisiche si esprimono come potenze positive, negative o nulle dell'elettronvolt.

Grandezza fisica	Simbolo	Unità nel sistema naturale	Unità nel sistema MKSA
Quanto di Planck	$\hbar$	1	$1.05457266 \times 10^{-34}$ Js
Velocità	v	1	$2.99792458\ 10^{8}\ \frac{m}{s}$
Velocità della luce nel vuoto	c	1	$2.99792458\ \ 10^{8}$ m/s
Carica elettrica	q	1	$1.8755468 \times 10^{-18}\ c$
Resistenza	R	1	$29.979246\ \Omega$
Flusso magnetico	ϕ	1	$5.6227478\ 10^{-17}$ Wb
lunghezza	l	1/eV	1.9732705×10^{-7} m $\sim 0{,}2\mu m$
Tempo	t	1/eV	$6.5821220\ 10^{-16} s$
Capacità	C	1/eV	$2.1955596 \times 10^{-17}$ F
Induttanza	L	1/eV	$1.9732705 \times 10^{-14}$ H
Raggio di Bohr $\frac{\hbar^2}{me^2}$	a_0	2.6817268×10^{-4}/eV	$5.29177249 \times 10^{-11}$ m
Magnetone di Bohr	μ_B	$8.3585815\ \ 10^{-8}$/eV	$9.2740154\ \ \ 10^{-24}$ J/T
Costante di gravitazione universale	G	$6.70711\ 10^{-57}/\mathrm{eV}^2$	$6.67259\ \ 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{k_g^2}$
Massa	m	1 eV	$1.7826627 \times 10^{-36}\ kg$
Frequenza	ν	1 eV	$1.5192669 \times 10^{15}\ H_z$

[03:36] Bene, in questa diapositiva è presentata una tabella in cui abbiamo quattro colonne, abbiamo la grandezza fisica, il simbolo, l'unità di misura nel sistema naturale, l'unità di misura nel sistema MKSA. Vediamo che alcune grandezze, prendiamo per esempio il

Quanto di Planck: il Quanto di Planck ha valore unitario nel sistema naturale, e vale 1.05×10^{-34} Js nel sistema MKSA.

[04:07] Per quanto riguarda la velocità, la velocità è adimensionale e un'unità di misura di velocità nel sistema naturale vale circa 2.99×10^{8} m/s nel sistema MKSA. Per esempio la carica elettrica: un'unità di misura di carica elettrica nel sistema delle unità naturali vale circa 1.87×10^{-18} C nel sistema MKSA.

[04:34] Poi abbiamo delle grandezze che hanno come unità di misura l'inverso dell'elettronvolt. Queste grandezze sono la lunghezza, il tempo, la capacità, l'induttanza, eccetera. Poi abbiamo ancora delle grandezze che hanno come unità di misura l'elettronvolt e qui nella tabella vediamo per esempio la massa e la frequenza.

Quantità di moto	p	1 eV	$5.3442883 \times 10^{-28}\ \frac{kg \cdot m}{s}$
Energia	E	1 eV	$1.6021773 \times 10^{-19}\ J$
Conducibilità	σ	1eV	1.6904124×10^{5} S/m
Energy 1 electron volt	eV	1eV	$1.60217733 \times 10^{-19}$ J
Corrente	I	1 eV	2.8494561 mA
Potenziale	ϕ	1eV	85.424546 mV
Rydberg energy, $\frac{e^2}{2a_0}$	ERyd	13.605698 eV	$2.1798741 \times 10^{-18}$ J
Hartree energy, $\frac{e^2}{a_0}$	Eh	27.211396 eV	$4.3597482 \times 10^{-18}$ J
Potenza	P	$1eV^2$	0.24341350 mW
Campo elettrico	E	$1eV^2$	432.90844 V/mm
Induzione magnetica	B	$1eV^2$	1.4440271 mT
Magnetizzazione	M	$1eV^2$	1.4440271×10^{4} A/m
Densità di carica	ρ	$1eV^3$	$244.10013\ \frac{C}{m^3}$
Densità di corrente	J	$1eV^3$	$7.3179379 \times 10^{10}\ \frac{A}{m^2}$
Massa dell'elettrone	m_e	510.99906 keV	$9.1093897\ \ 10^{-31}$ kg
Massa del protone	m_p	938.27234 MeV	$1.6726231\ \ 10^{-27}$ kg

[04:58] E ancora: la quantità di moto, che si misura in elettronvolt, l'energia, la conducibilità—l'energia di un elettronvolt per definizione appunto si misura in elettronvolt—la corrente, il potenziale. Poi abbiamo delle grandezze che hanno come unità di misura il quadrato dell'elettronvolt, e altre come la densità di carica o la densità di corrente che hanno il cubo dell'elettronvolt.

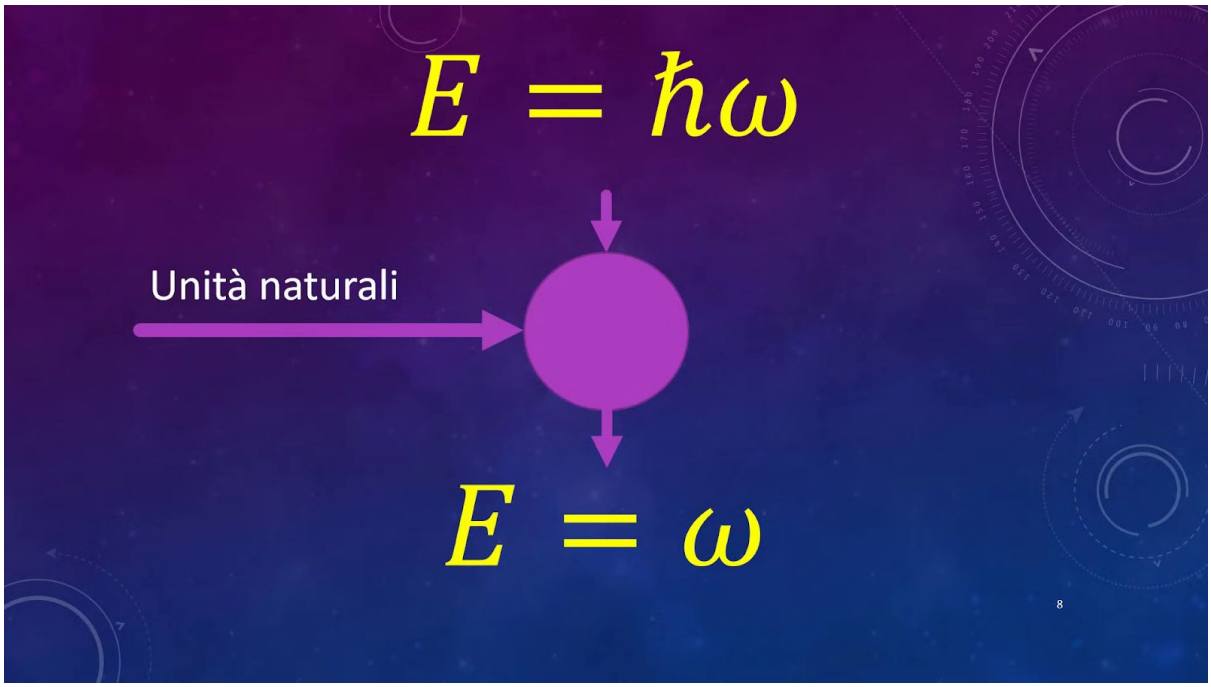
[05:25] La massa dell'elettrone si misura in un multiplo dell'elettronvolt perché... keV sarebbe eV $\times 10^{3}$; la massa del protone, che come sappiamo è circa 1836 volte maggiore di quella dell'elettrone, si misura in MeV.

Grandezza fisica	Simbolo	Unità nel sistema naturale	Unità nel sistema MKSA
Massa del neutrone	m_n	939.56563 MeV	1.6749286 10^{-27} kg
$h = 2\pi\hbar$	h	2π	6.6260755 10^{-34} Js
Carica dell'elettrone	e	8.5424546×10^{-2}	$1.60217733 \times 10^{-19}$ C
Permeabilità magnetica nel vuoto	μ_0	4π	$4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}$
Costante dielettrica del vuoto	ε_0	$\frac{1}{4\pi}$	8.854187817 $10^{-12} \frac{F}{m}$

7

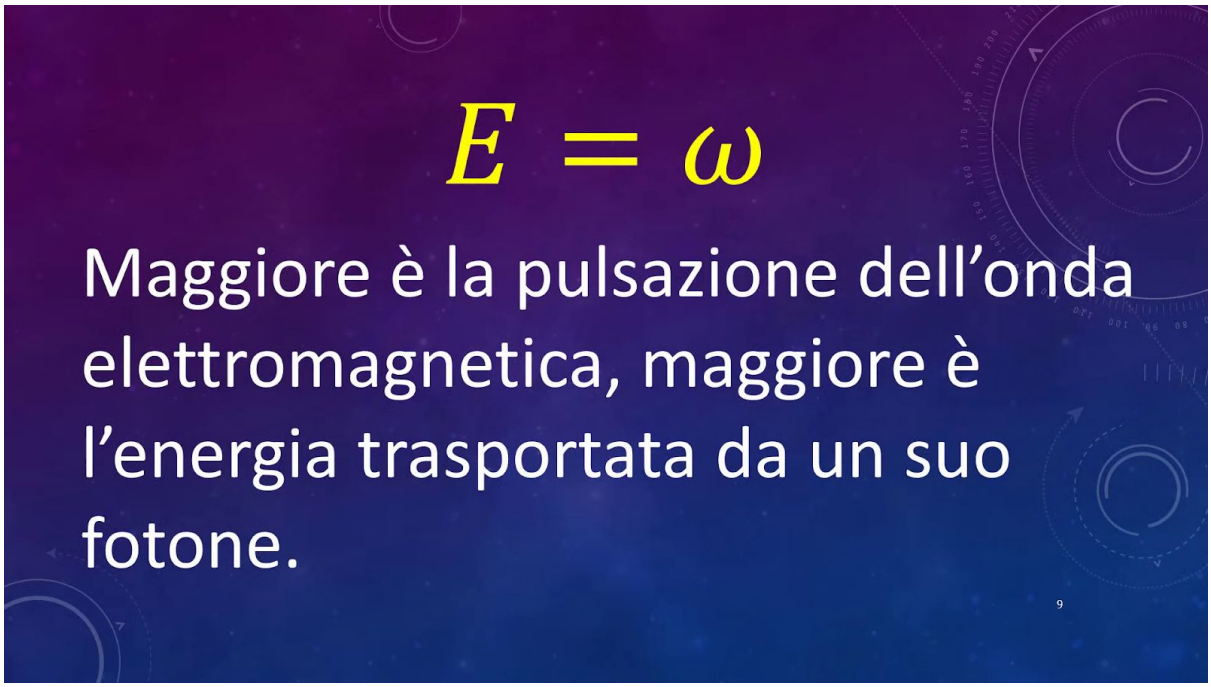
[05:48] Andiamo ancora avanti. Qui abbiamo la massa del neutrone—ancora MeV—poi abbiamo delle costanti che sostanzialmente sono ancora dei numeri puri: la carica dell'elettrone in unità naturali è un numero che non ha un'unità di misura: è circa 8.5×10^{-2} che equivale a 1.6×10^{-19} C. La permeabilità magnetica del vuoto è anche questa un numero senza unità di misura, vale 4π, mentre nel sistema MKSA vale $4\pi\ 10^{-7}$ H/m.

[06:27] La costante dielettrica del vuoto, nel sistema naturale è un numero senza unità di misura: vale $1/4\pi$, mentre nel sistema MKSA vale $8.85\ 10^{-12}$ F/m.

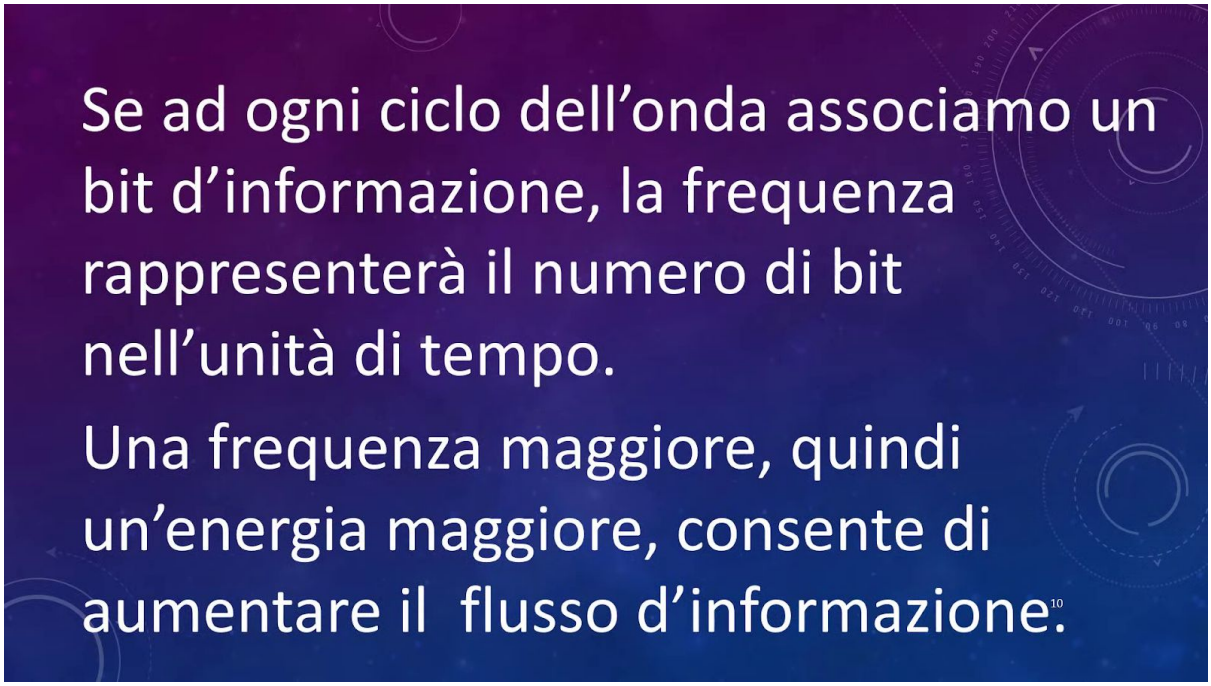


[06:48] Bene: dopo avere introdotto le unità naturali riguardiamo sostanzialmente la relazione di Planck $E = \hbar\omega$. Se, appunto, consideriamo adesso che abbiamo introdotto le

unità naturali, la relazione di Planck diviene sostanzialmente $E = \omega$, perché come abbiamo visto nelle unità naturali $\hbar$ è uguale ad 1.

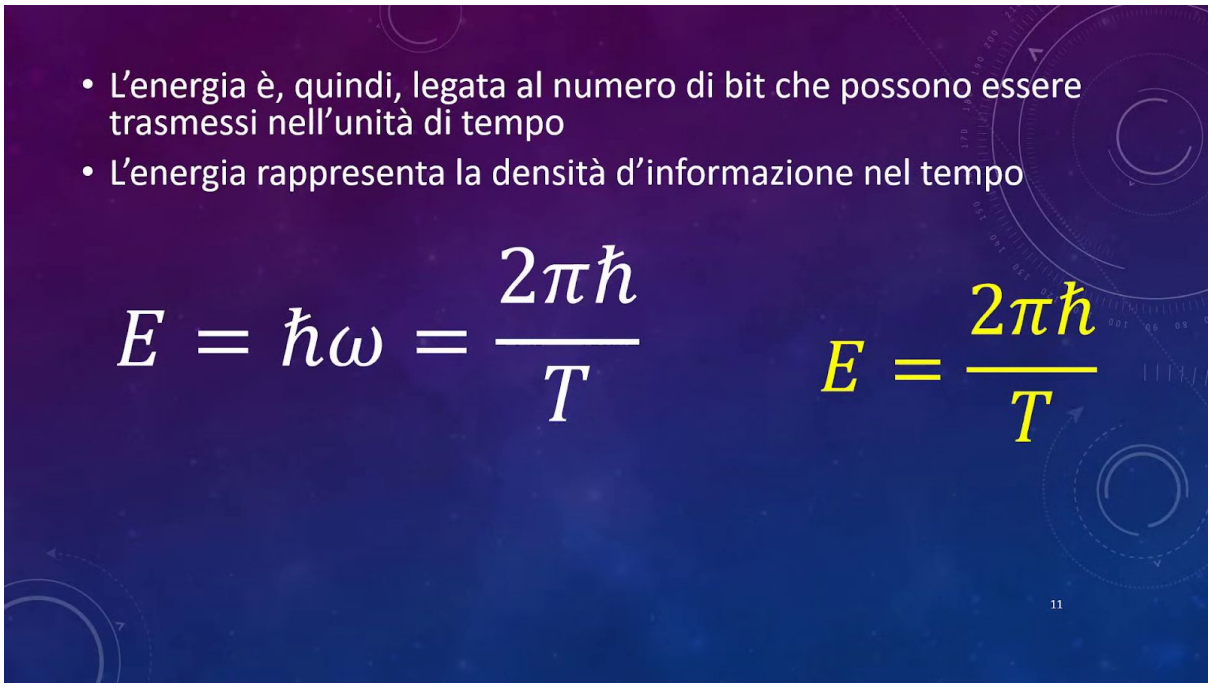


[07:19] Ed ecco, abbiamo la nostra relazione $E = \omega$. Cosa significa? Maggiore è la pulsazione dell'onda elettromagnetica, maggiore è l'energia trasportata da un suo quanto, quindi da un suo fotone, sostanzialmente.



[07:42] Bene. Adesso, se ad ogni ciclo dell'onda associamo un bit di informazione, cosa rappresenterà la frequenza? La frequenza rappresenterà proprio il numero di bit nell'unità di tempo. Inoltre, all'aumentare della frequenza avremo un aumento dell'energia e avremo la possibilità di aumentare il flusso di informazione. Quindi, in buona sostanza, l'energia è

strettamente legata al flusso di informazione, è strettamente legata al numero di bit di informazione nell'unità di tempo.



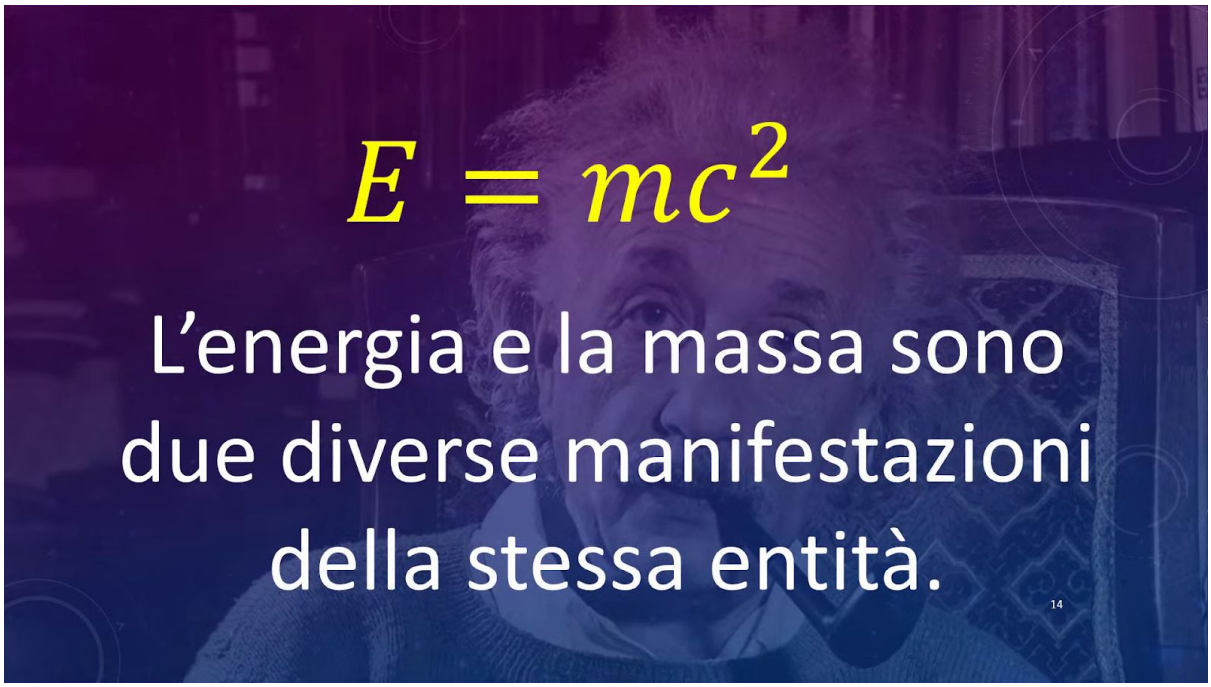
[08:32] Quindi: qui questa diapositiva ripete quanto già abbiamo detto, quindi sostanzialmente l'energia è legata al numero di bit che possono essere trasmessi nell'unità di tempo. Quindi l'energia in qualche modo rappresenta la densità di informazione nel tempo. Se $\hbar\omega$, ω lo possiamo riguardare come $2\pi/T$, quindi la relazione $E = \hbar\omega$ diventa $E = 2\pi\hbar/T$. Questa relazione ci mostra chiaramente come l'energia sia legata praticamente al numero di bit che possono essere trasmessi nell'unità di tempo.

[09:15] Se teniamo conto che $2\pi\hbar$ è una costante, praticamente l'energia varia come l'inverso di un tempo, dove in questo caso il tempo è il periodo dell'onda elettromagnetica. E qui è riportata la relazione $E = 2\pi\hbar/T$.

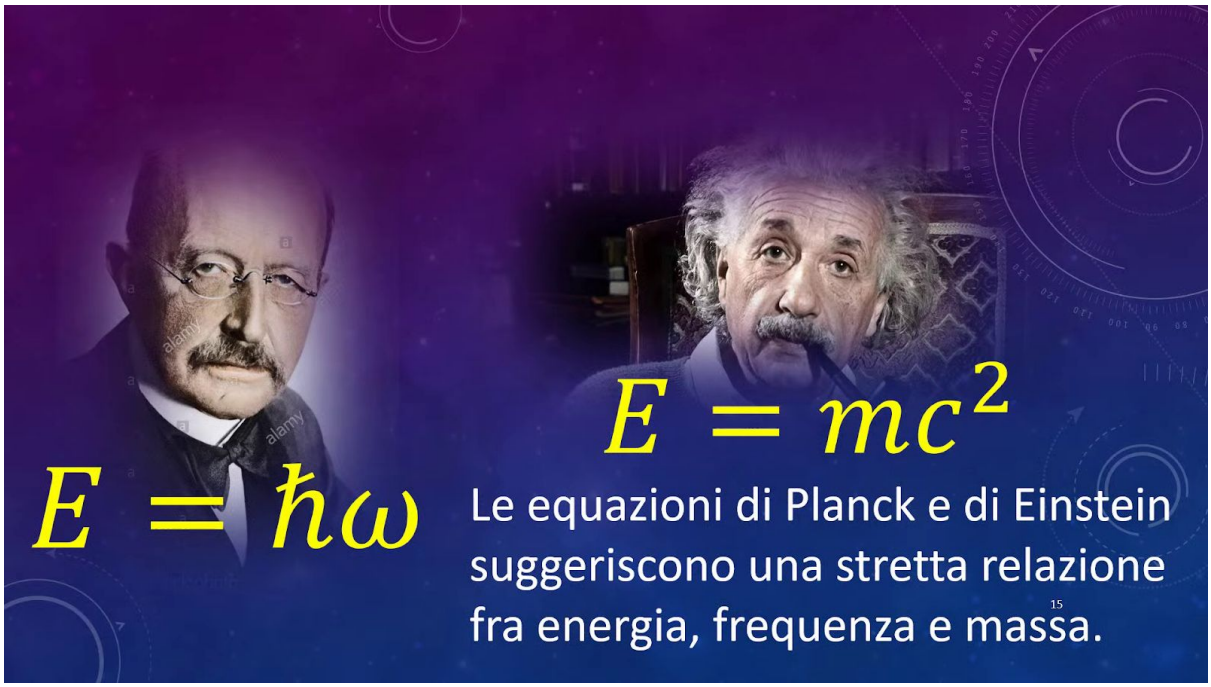
[09:41] Adesso, se consideriamo ancora le due relazioni $E = h\nu$, la relazione di Planck, e consideriamo il fatto che la velocità di propagazione di un'onda è dato dal prodotto della lunghezza d'onda per la frequenza $c = \lambda\nu$, se mettiamo insieme queste due relazioni viene fuori la relazione $E = hc/\lambda$. Quindi, l'energia varia come l'inverso di una lunghezza, in questo caso la lunghezza d'onda. Quindi se la lunghezza d'onda diminuisce, aumenta l'energia e quindi il numero di bit che posso trasportare nell'unità di tempo. Quindi l'energia rappresenta anche una densità di informazione nello spazio.

[10:31] Quindi, nella precedente slide abbiamo visto che l'energia rappresenta sostanzialmente una densità di informazione nel tempo; in questa slide stiamo vedendo che l'energia rappresenta una densità di informazione anche nello spazio.

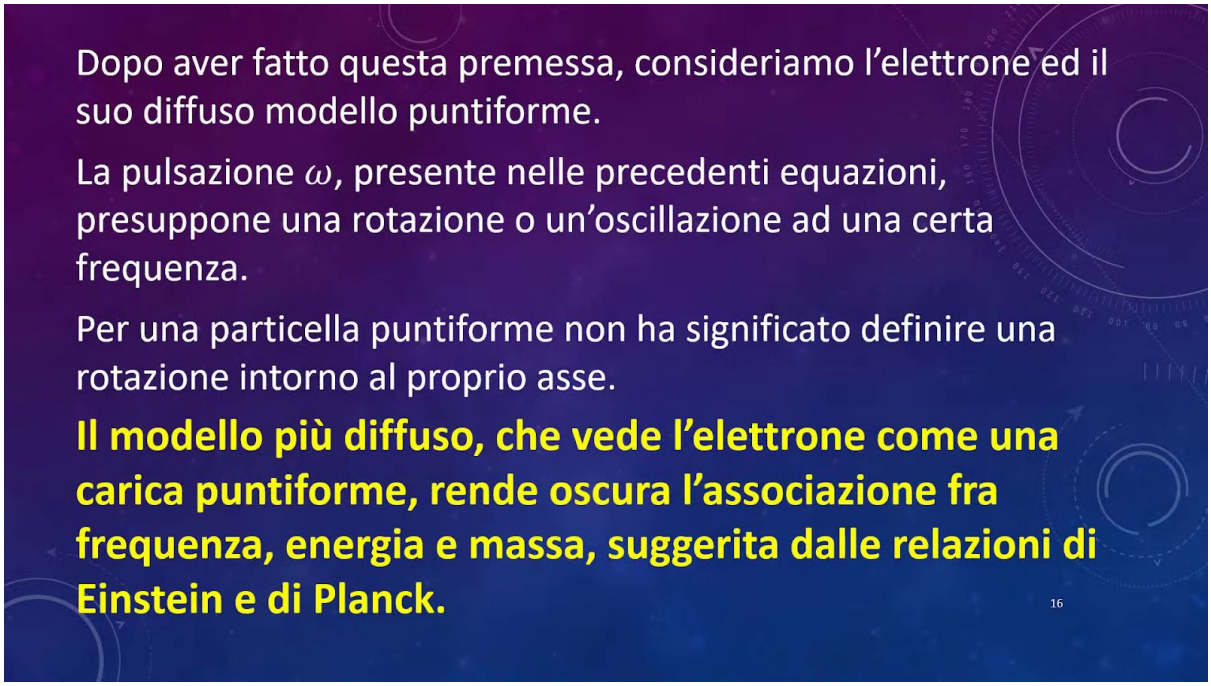
[10:51] Adesso qui abbiamo Planck. La relazione $E = 2\pi\hbar/T$ e la relazione $E = hc/\lambda$; quindi l'una mi dice che l'energia rappresenta una densità di informazione nel tempo, l'altra mi dice che l'energia rappresenta una densità di informazione nello spazio.



[11:19] Andiamo ancora avanti: ecco che qui abbiamo Einstein con la sua famosa $E = mc^2$ che sostanzialmente ci dice che l'energia e la massa sono due diverse manifestazioni della stessa entità, che fondamentalmente sono la stessa cosa. Quindi, se io avessi la possibilità di trasformare una certa quantità di massa in energia otterrei una energia pari proprio al prodotto della massa per la velocità della luce al quadrato. Siccome è noto che la velocità della luce è un numero abbastanza elevato—circa 3×10^8 m/s, al quadrato ottengo come ordine di grandezza 10^{16}—quindi anche un'esigua quantità di massa mi darebbe una notevole quantità di energia.



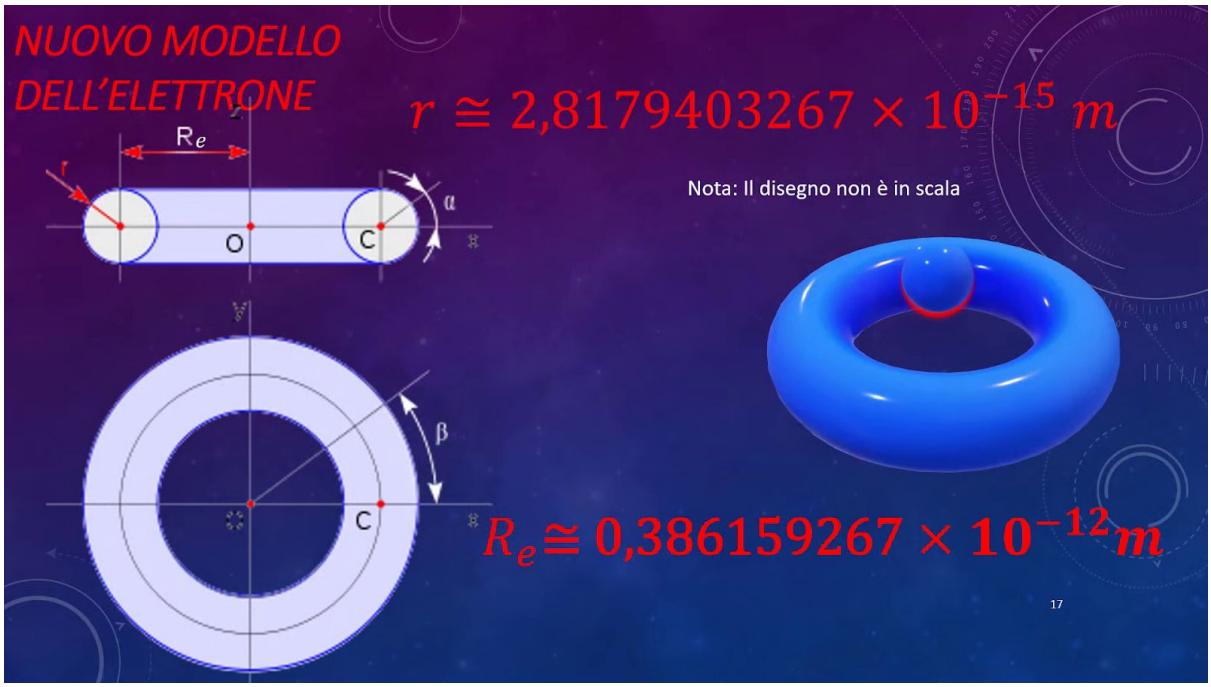
[12:08] Andiamo avanti: riprendiamo ancora la relazione $E = \hbar\omega$, la relazione appunto di Planck. Consideriamo ancora la relazione di Einstein $E = mc^2$; queste due relazioni, queste due equazioni matematiche suggeriscono una stretta relazione tra energia, frequenza e massa. Quindi, l'energia, la frequenza e la massa sono intimamente legate da queste relazioni.



[12:46] Dopo aver fatto questa premessa, adesso consideriamo l'elettrone nel suo modello più diffuso, che è quello di carica puntiforme. Ora, la pulsazione ω, che abbiamo visto nelle precedenti relazioni, presuppone che ci sia una rotazione o un'oscillazione ad certa frequenza. Per una particella puntiforme non ha significato definire una rotazione attorno al proprio asse. Quindi, cosa possiamo concludere? Possiamo sicuramente concludere che il

modello più diffuso, che vede l'elettrone come una carica puntiforme, rende praticamente oscura l'associazione fra frequenza, energia e massa che invece sono suggerite in maniera chiarissima dalle relazioni di Einstein e di Planck.

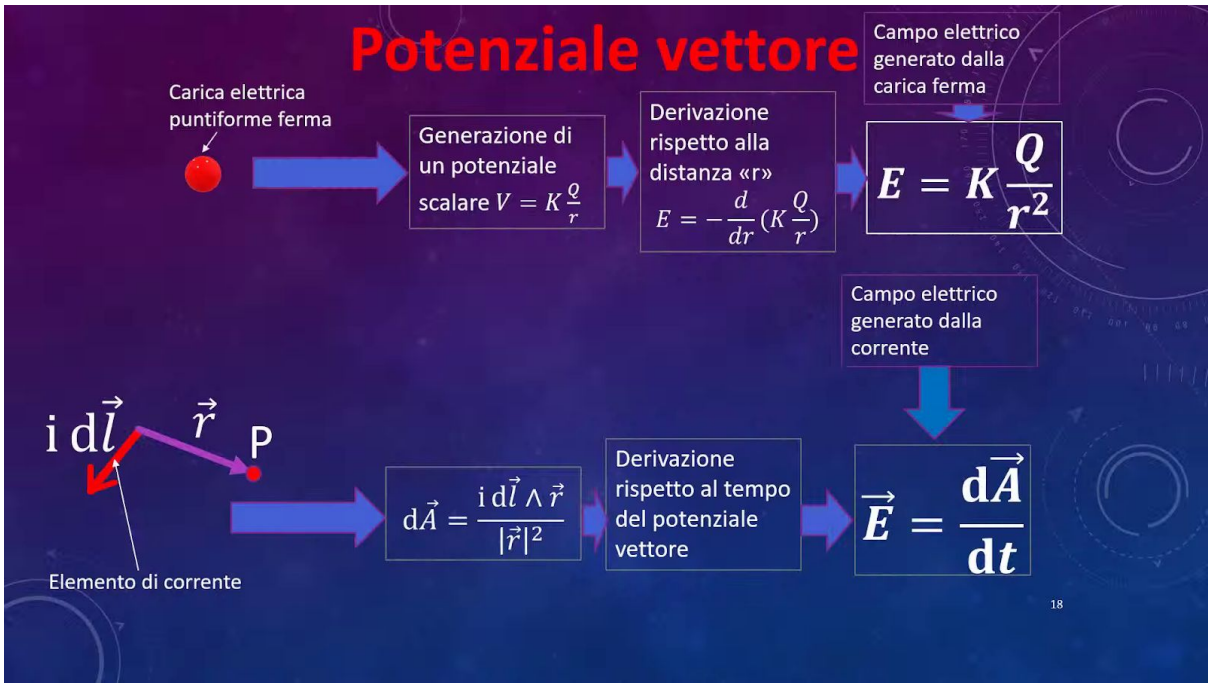
[13:37] E ancora qui, diamo enfasi a questa frase con questa animazione.



[13:52] Allora, vediamo il nuovo modello dell'elettrone, il modello presentato dai nostri fisici. Il modello è costituito da una sferetta carica, avente come carica la carica dell'elettrone e avente come raggio il raggio classico dell'elettrone: circa, come ordine di grandezza 10^{-15} m, che ruota ad una velocità pari a quella della luce descrivendo una circonferenza di raggio R_e, dove R_e è un raggio coincidente con la lunghezza d'onda di Compton ridotta dell'elettrone, cioè circa 0.38 picometri.

[14:34] Quindi ecco che qui abbiamo la sferetta, la nostra sferetta carica avente una carica pari a quella dell'elettrone, priva di massa—la sferetta è priva di massa—che ruota descrivendo un raggio R_e pari alla lunghezza d'onda di Compton ridotta. Quindi, nel ruotare descrive una figura toroidale. È importante notare che questa figura non è in scala, perché se fosse in scala il diametro della sferetta dovrebbe essere circa 137 volte più piccolo rispetto al diametro dell'anello di corrente del toroide. In realtà qui non è così perché il disegno non è rappresentato in scala.

[15:20] Ecco qui, è detto: il disegno non è in scala; abbiamo che il raggio r è 2.81… × 10^{-15} m, raggio classico dell'elettrone, e abbiamo che il raggio R_e descritto dalla sferetta è circa 0.38 picometri. Qui ci sono tutte le cifre secondo le informazioni CODATA. Adesso vedremo un'animazione in cui questa sferetta, carica, priva di massa, ruota descrivendo appunto questa figura toroidale. Eccola qua.

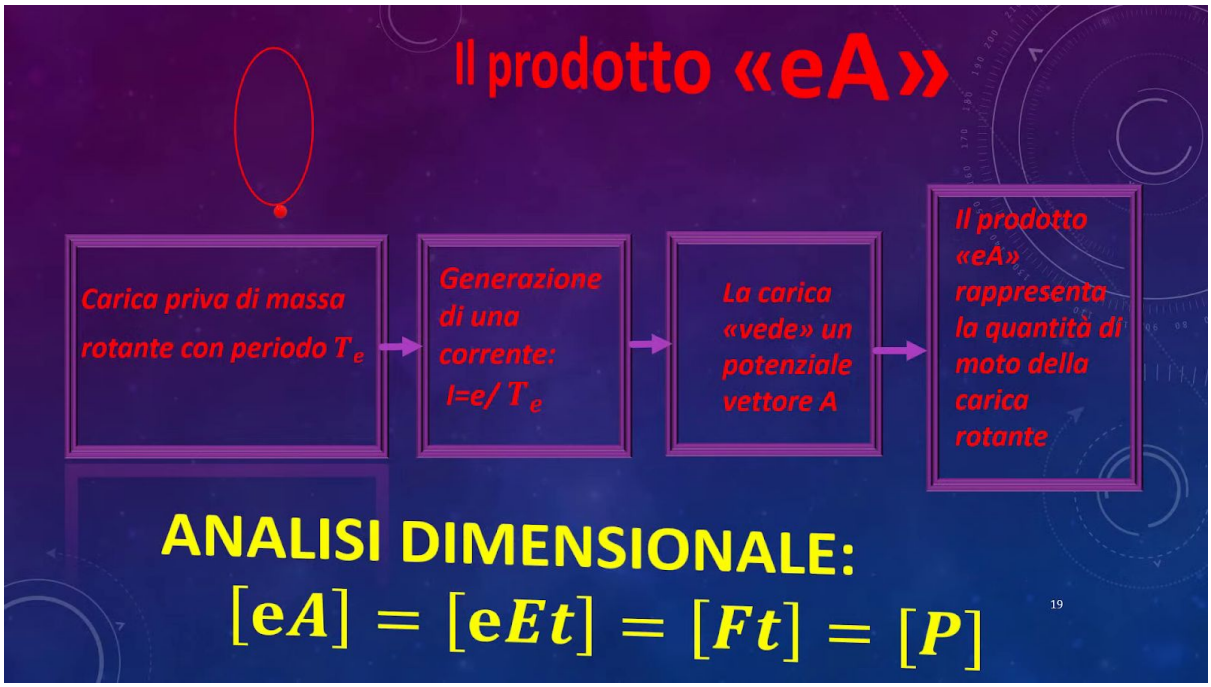


[16:03] Ora, per comprendere appieno, diciamo, il nuovo modello, è necessario introdurre un concetto importante, che è quello di potenziale vettore. Cosa facciamo? Partiamo da un elemento di carica, quindi una carica puntiforme, ferma, che chiamiamo Q. Questo elemento di carica, dalla elettrostatica classica, cosa genera? Genera chiaramente un potenziale scalare, che per una carica puntiforme ha come espressione $K\,Q/r$.

[16:39] Il potenziale scalare, se noi lo deriviamo rispetto ad r e cambiamo di segno questa derivata, ci permette di ottenere il campo elettrico. Quindi il campo elettrico è proprio $K\,Q/r^2$. Quindi questo è il campo elettrico generato da una carica puntiforme ferma nello spazio.

[17:00] Adesso, invece di considerare una carica puntiforme per definire il potenziale vettore consideriamo un elemento di corrente i dl. Abbiamo l'elemento di corrente , quindi un trattino, immaginiamo di avere un pezzettino di filo in cui circola questa corrente i, un trattino elementale dl, ci mettiamo in un punto P, il punto P è individuato dal raggio vettore r. Cosa succede? Che praticamente questo elementino di corrente genera un potenziale vettore dA, dato da [equazione].

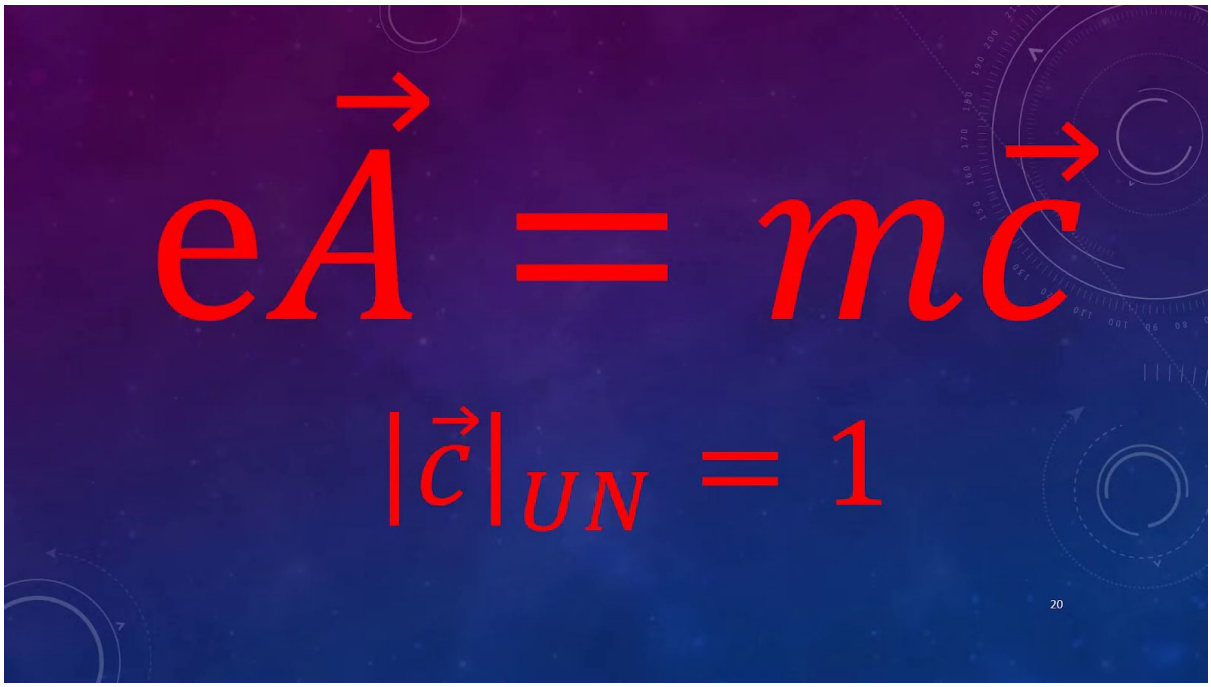
[17:45] Se noi questo dA lo integriamo in un percorso chiuso, immaginando che questa corrente si chiuda in un certo percorso, otteniamo A = dA. Ma a questo punto la derivazione rispetto al tempo del potenziale vettore ci dà il campo elettrico. Quindi esattamente come la derivata del potenziale scalare ci dava il campo elettrico nel caso di un elemento di carica, la derivata rispetto al tempo del potenziale vettore ci dà il campo elettrico nel caso in cui abbiamo un elemento di corrente.



[18:37] Andiamo avanti. Ecco, questo è ancora un disegno del nostro modello. Abbiamo la sferetta priva di massa di raggio r pari al raggio classico dell'elettrone che si muove lungo la circonferenza, ancora abbiamo una animazione. E vediamo di indagare un po' di più sul prodotto eA.

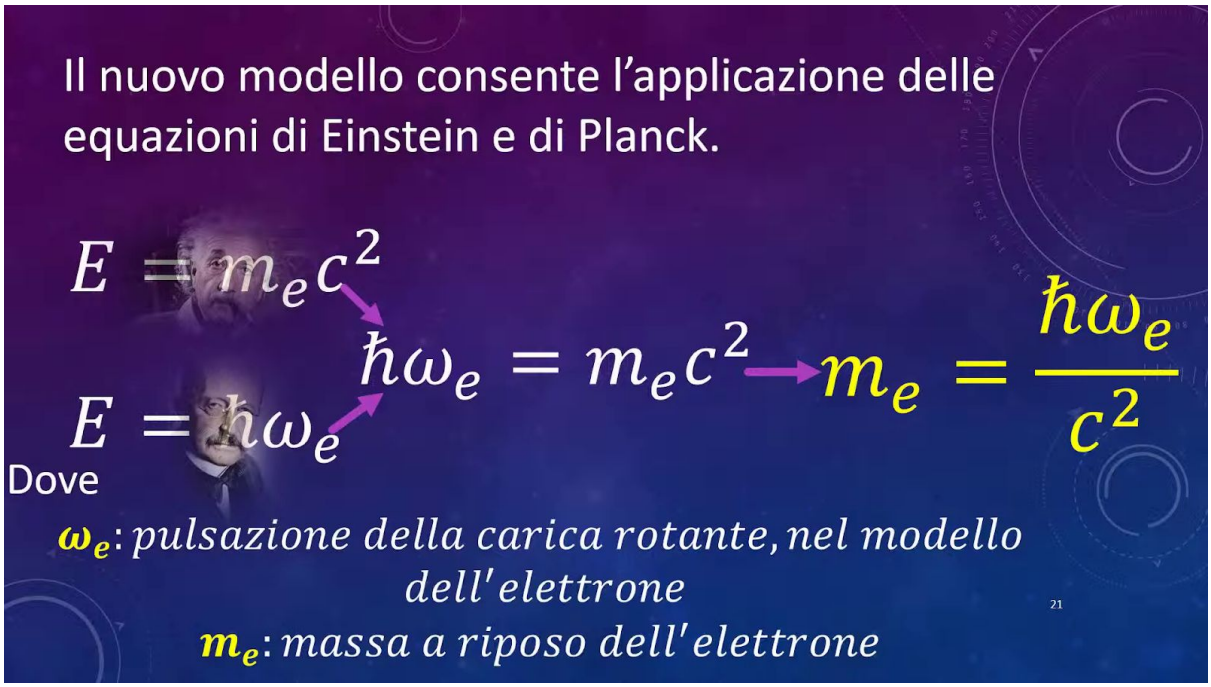
[19:04] Allora, passiamo in rassegna cosa succede. Abbiamo la carica priva di massa che ruota con un periodo T_e. Questa carica priva di massa genera una corrente data dal rapporto semplicemente di e/T_e, perché la carica, ricordiamo che è quella dell'elettrone. Questa corrente vede un potenziale vettore generato da essa stessa, un potenziale vettore A; e ancora: il prodotto eA rappresenta la quantità di moto della carica rotante.

[19:39] Quindi: la carica rotante, pur essendo priva di massa, possiede una quantità di moto data dal prodotto eA. Infatti, se facciamo un'analisi dimensionale del prodotto eA ci accorgiamo che abbiamo proprio le dimensioni di una quantità di moto. Infatti e è una carica, A abbiamo detto che è il potenziale vettore, è un oggetto la cui derivata nel tempo mi dà il campo elettrico. Ma allora, avrà le dimensioni di un campo elettrico per un tempo. Quindi ho una carica per un campo elettrico, per un tempo. Una carica per un campo elettrico mi dà una forza; una forza per un tempo genera una quantità di moto. Quindi, sicuramente il prodotto eA ha le dimensioni di una quantità di moto. Quindi è come se la carica, benché priva di massa, che ruota formando un anello di corrente, benché priva di massa possedesse una quantità di moto data proprio dal prodotto eA.



[20:52] Bene: la relazione fondamentale, peculiare del modello è eA = mc. Abbiamo detto che eA ha le dimensioni di una quantità di moto, quindi il prodotto della carica per il potenziale vettore; ma se è una quantità di moto, posso pensare a questa quantità di moto come il prodotto di una massa, che sarà del sistema elettrone per la velocità della luce. Chiaramente questa è una relazione vettoriale.

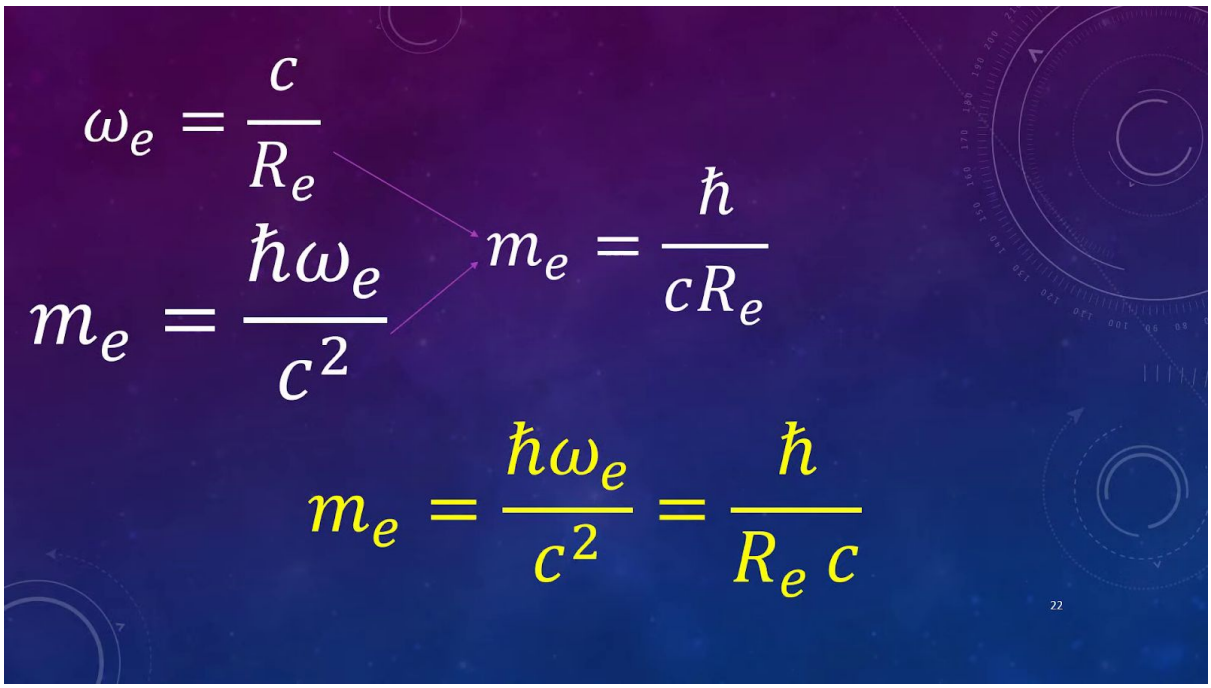
[21:22] Quindi la massa non è più un qualcosa che viene dato *sic et simpliciter*, ma si evince da questa equazione, che è l'equazione peculiare fondamentale del modello. Naturalmente in unità naturali il modulo della velocità della luce è proprio pari ad 1, è unitario.



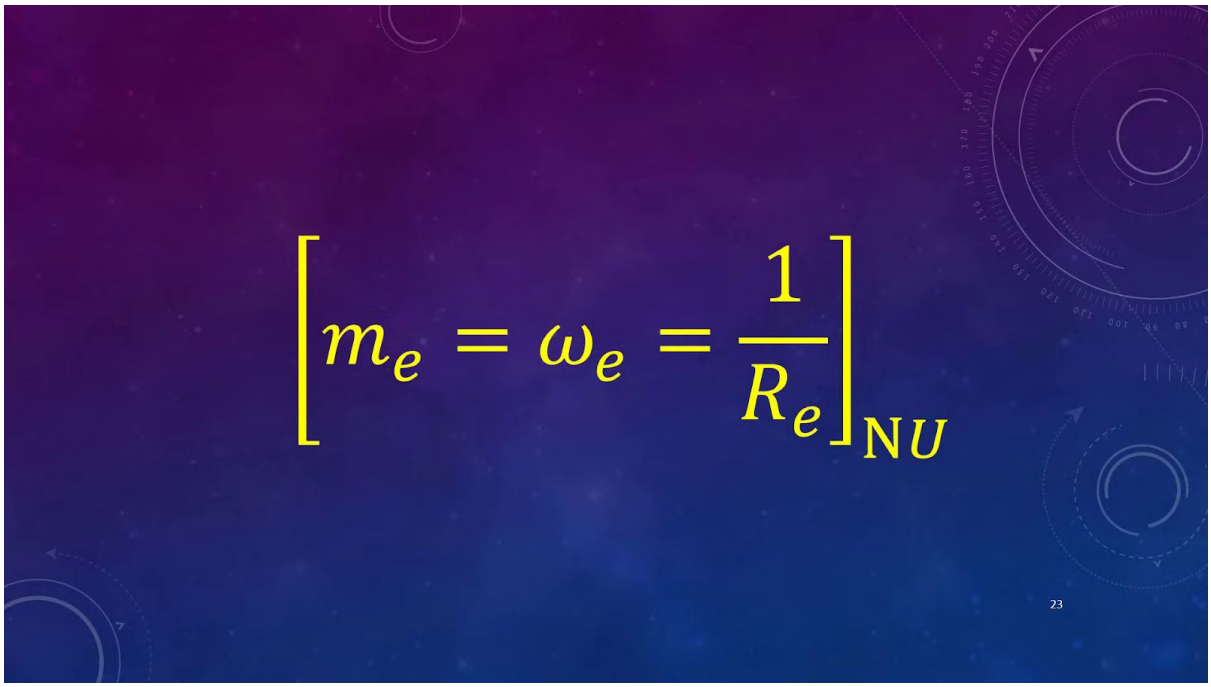
[21:44] Andiamo avanti. Il nuovo modello adesso consente praticamente l'applicazione delle equazioni di Einstein e di Planck, cosa che il modello di carica puntiforme non consentiva. Allora, da un lato possiamo scrivere che E sarà $m_e c^2$, dove me è la massa a riposo dell'elettrone. Ecco che abbiamo Einstein, le equazioni di Einstein. Ma ancora possiamo dire che $E = \hbar\omega_e$, e qui abbiamo la relazione di Planck. Queste due relazioni hanno significato nel nostro modello, perché abbiamo attribuito al modello una massa, che è estrinsecabile dalla relazione e$A = mc$.

[22:32] Adesso ha senso di parlare di una pulsazione, perché abbiamo una carica, che ruota descrivendo una circonferenza. Quindi le due equazioni che non avevano significato nel caso di carica puntiforme assumono pieno significato con questo nuovo modello.

[22:49] Ma cosa facciamo a questo punto? Uguagliamo $\hbar\omega_e = m_e c^2$ e risolviamo rispetto ad m_e. Otteniamo che $m_e = \hbar\omega_e/c^2$. ω_e è la pulsazione della carica rotante nel modello dell'elettrone; m_e è la massa a riposo dello stesso elettrone. Andiamo avanti.

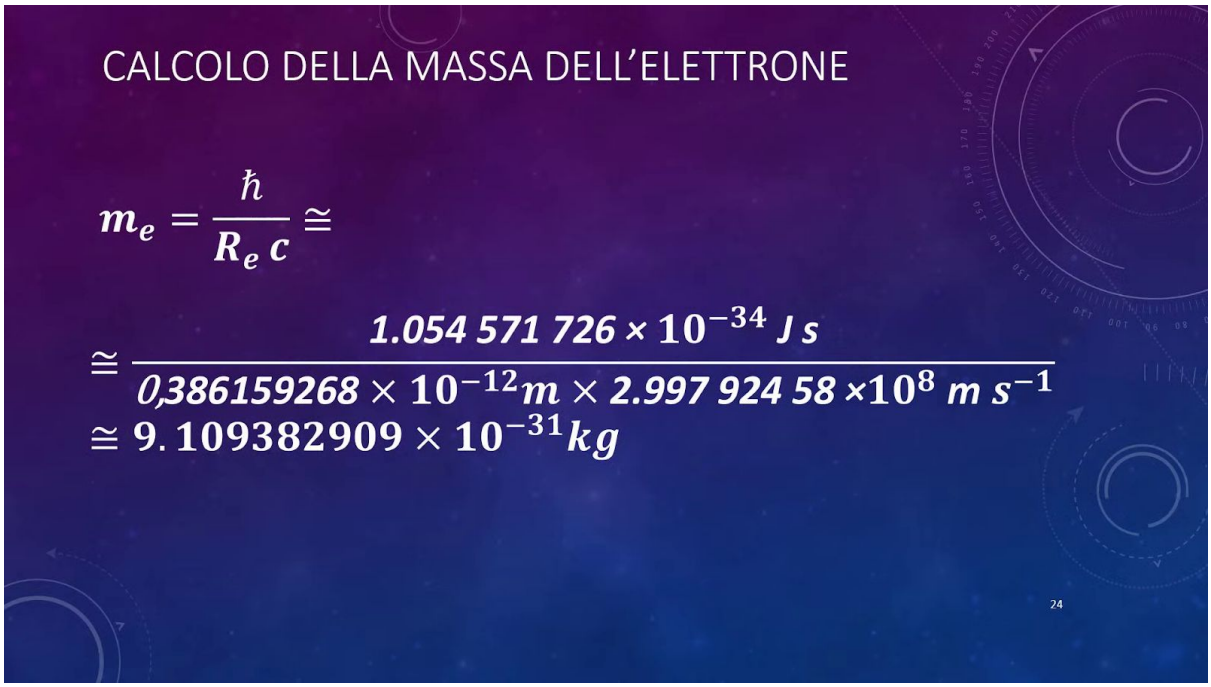


[23:24] Inoltre, la pulsazione ω_e la possiamo esprimere come rapporto tra la velocità della luce—velocità alla quale si muove la carica—e il raggio R_e. Quindi, se nella relazione $m_e = \hbar\omega_e/c^2$ al posto di ω_e ci mettiamo c/R_e otteniamo da queste due relazioni che m_e è anche uguale a $\hbar/cR_e$. Quindi, in buona sostanza abbiamo $m_e = \hbar\omega_e/c^2$, quindi direttamente proporzionale alla pulsazione, ma anche $m_e = \hbar/R_e c$, quindi inversamente proporzionale al raggio dell'orbita. Quindi, andiamo avanti.



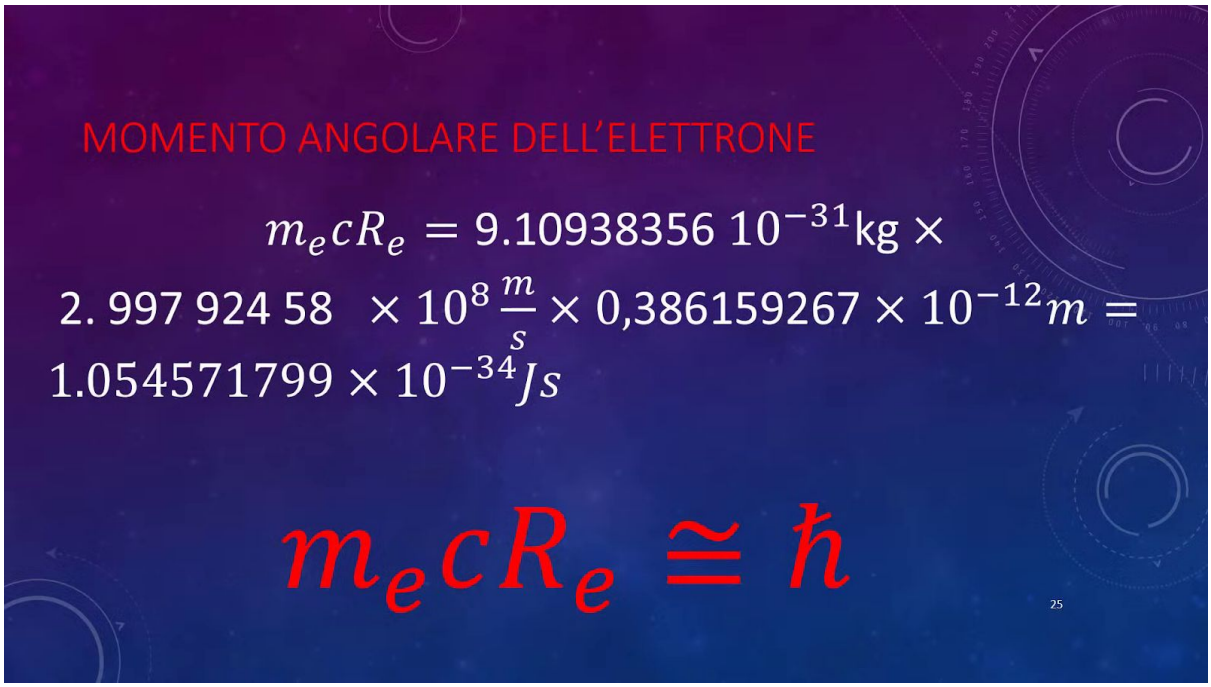
[24:23] Se lavoro nelle unità naturali, la costante $\hbar$ è uguale a 1; la velocità della luce è uguale ad 1. Quindi, la precedente relazione diventa $m_e = \omega_e = 1/R_e$. Quindi, questa relazione è incredibilmente chiara: cioè ci dice come proprio la massa dell'elettrone—se lavoriamo nelle unità naturali—altri non è se non la pulsazione angolare della sferetta che gira formando l'anello di corrente, ed è anche l'inverso del raggio di curvatura praticamente, del raggio della circonferenza. Quindi $m_e = \omega_e = 1/R_e$ nelle unità naturali. Questa è una diapositiva fondamentale perché proprio coglie nella essenza questo nuovo modello.

[25:32] Perché coglie nella essenza? Perché da' un significato fisico alla massa. La massa è proprio la pulsazione angolare. Non è una caratteristica che viene attribuita alla particella *d'emblée*. Ma è una caratteristica che si evince da un modello e che ha proprio un preciso significato fisico. Bene, detto questo andiamo avanti.

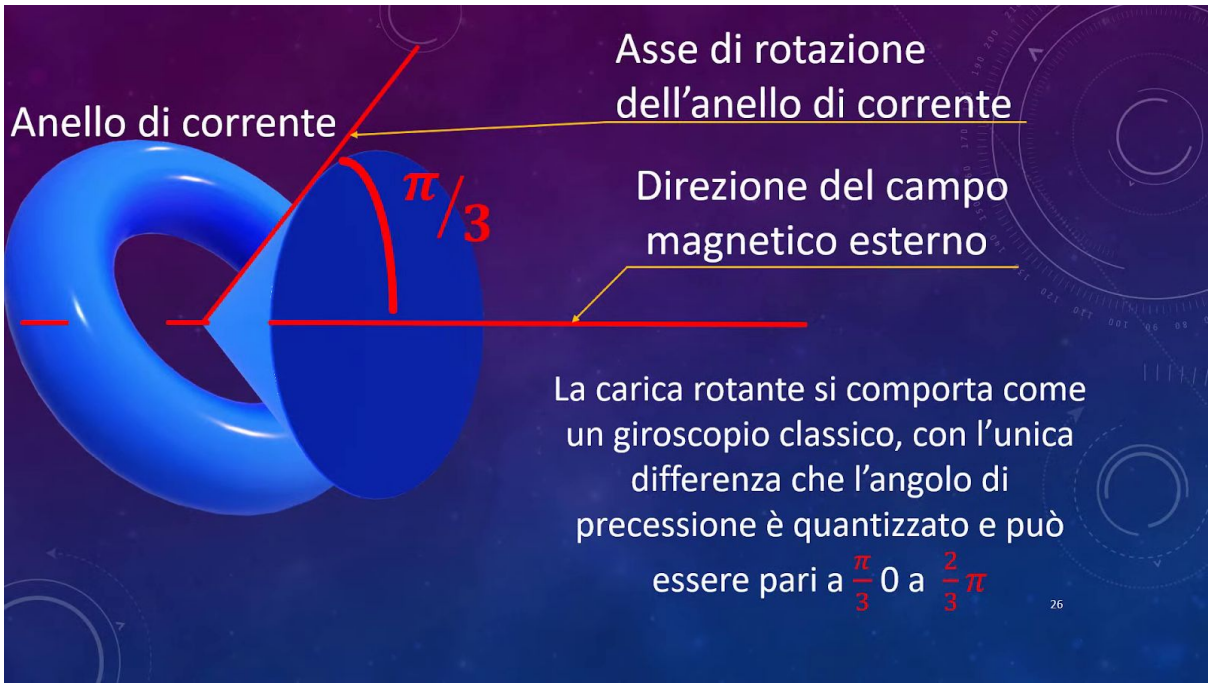


[26:06] Allora: riprendendo la formula, quella nelle unità MKS, quindi $m_e = \hbar/R_e c$, se sostituiamo al posto di $\hbar$, al posto di R_e, al posto di c i valori CODATA di queste grandezze—$\hbar$ è la costante di Planck ridotta; R_e sono i famosi 0.38 picometri del raggio che descrive la sferetta carica; la velocità della luce è già notissima, in CODATA è 2.99 con tutte queste cifre × 10^8 m s^{-1}—guarda caso viene proprio la massa classica dell'elettrone. Cioè questo modello ci restituisce la massa dell'elettrone non come un dato a priori, ma come un qualcosa che si evince dal modello stesso: dal modello stesso stesso si evince la massa dell'elettrone.

[27:03] Rispetto ai valori CODATA della massa dell'elettrone differiscono sostanzialmente le cifre decimali in coda.

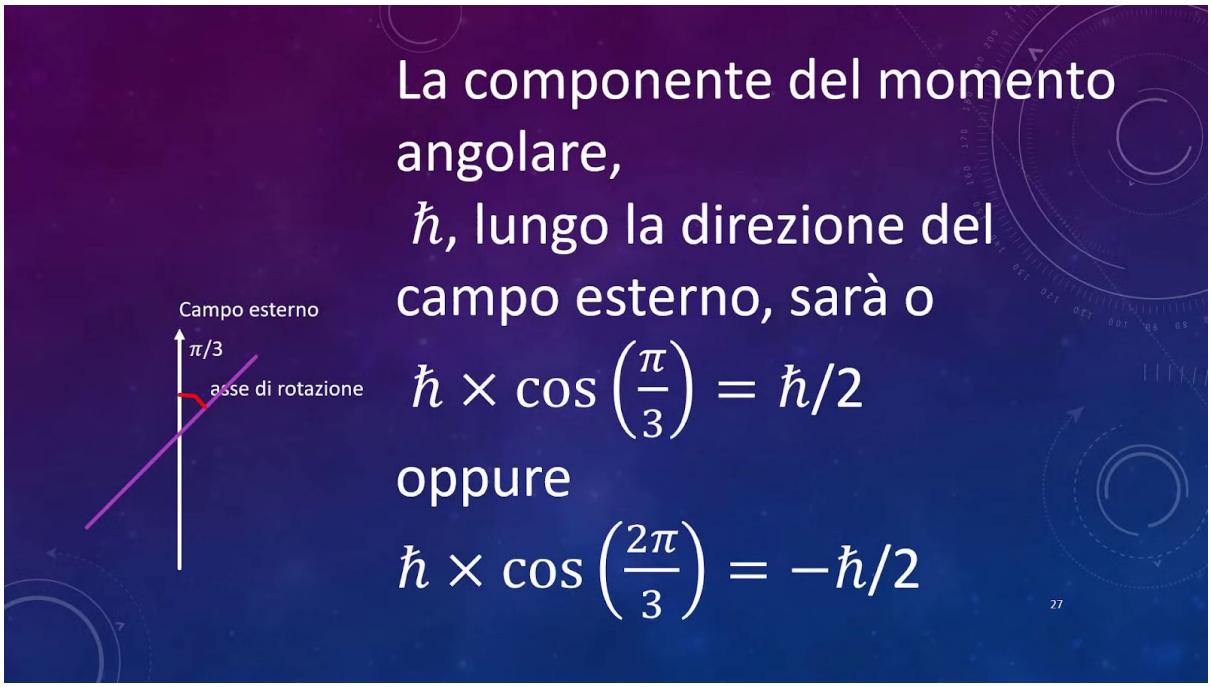


[27:19] Andiamo avanti. Calcoliamo il momento angolare, il momento della quantità di moto. Allora, abbiamo il prodotto della massa m_e per la velocità della luce, per il raggio R_e. Se sostituiamo i valori di m_e, di c, e di R_e, viene fuori 1.054… × 10^{-34} Js, ma questo valore è proprio il valore della costante di Planck ridotta. Quindi il valore $m_e c R_e$ è uguale circa a $\hbar$.

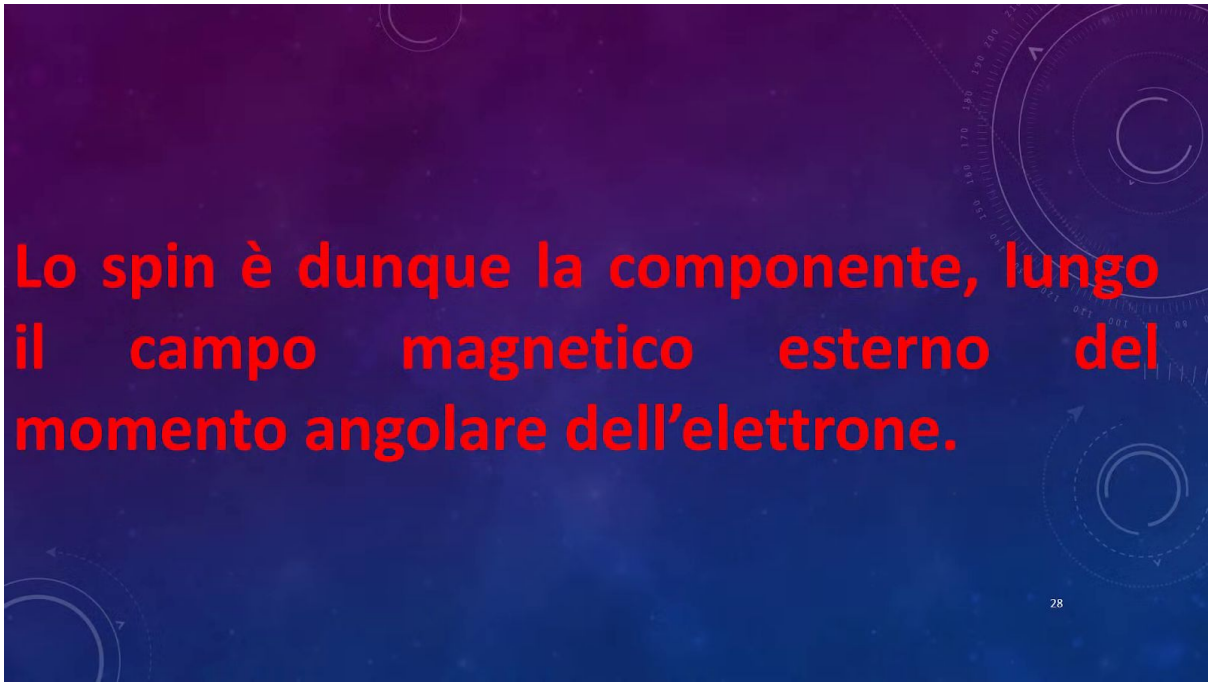


[28:05] Che significa questo? Vediamo un po' di capire: immaginiamo che questa ciambella sia il toroide descritto dalla sferetta rotante alla velocità della luce, quindi questo è l'anello di corrente; immaginiamo che questo in rosso sia l'asse di rotazione dell'anello di corrente; immaginiamo che questa sia la direzione di un campo magnetico esterno. L'angolo formato tra l'asse di rotazione dell'anello di corrente e la direzione del campo magnetico esterno è $\pi/3$, ed ecco che abbiamo questo cono che altri non è se non un cono generato dall'asse di rotazione dell'anello di corrente che esegue, che compie un moto di precessione intorno alla direzione del campo magnetico.

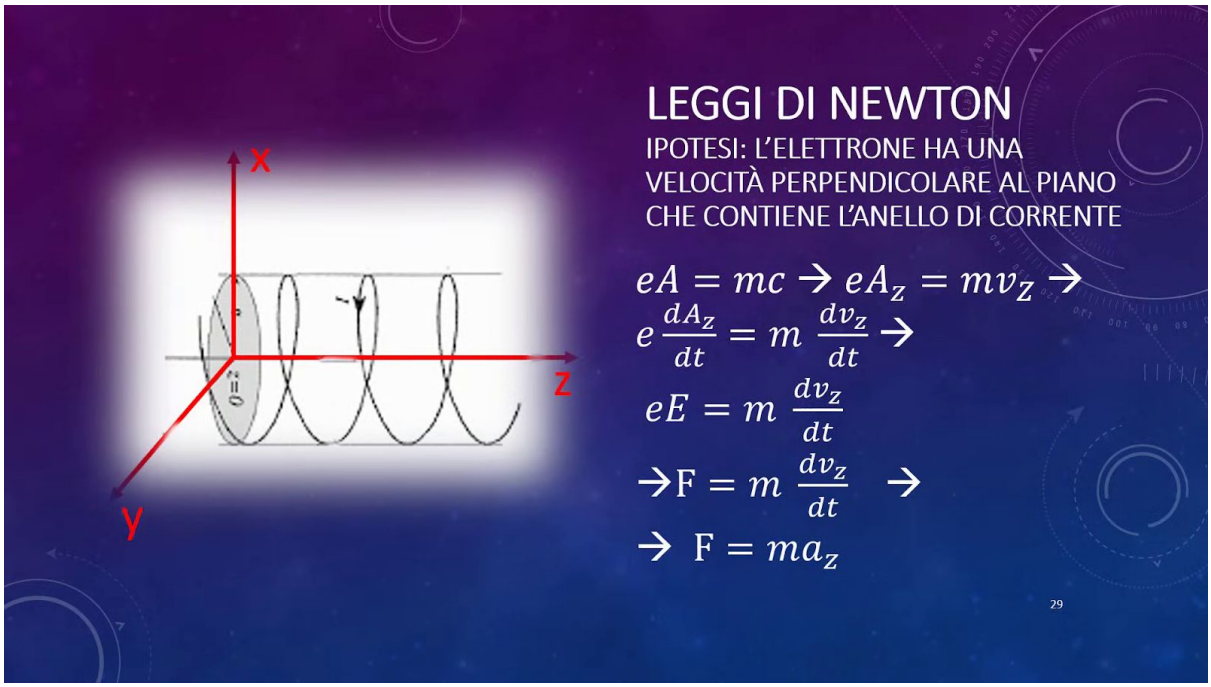
[29:11] Cosa succede? Succede che la carica rotante si comporta come un giroscopio classico, quindi non si allineerà mai con un campo magnetico esterno. L'unica differenza dalla carica rotante e un giroscopio classico sta nel fatto che l'angolo di precessione è quantizzato: può essere pari nel nostro modello a $\pi/3$ oppure a $2/3\,\pi$.



[29:48] Qui abbiamo ancora il campo magnetico esterno, l'asse di rotazione che supponiamo formi un angolo di $\pi/3$, l'asse di rotazione dell'anello di corrente; quindi la componente del momento angolare $\hbar$ lungo la direzione del campo magnetico sarà o $\hbar \times \cos(\pi/3)$ nel caso in cui l'angolo è $\pi/3$, il che significa $\hbar/2$; o $\hbar \times \cos(2\pi/3)$ nel caso in cui l'angolo è $2/3\,\pi$, il che significa $-\hbar/2$. Quindi quest'angolo è quantizzato, per cui ho una componente del momento angolare lungo la direzione del campo esterno. Questa componente del momento angolare lungo la direzione del campo esterno rappresenta proprio lo spin dell'elettrone.



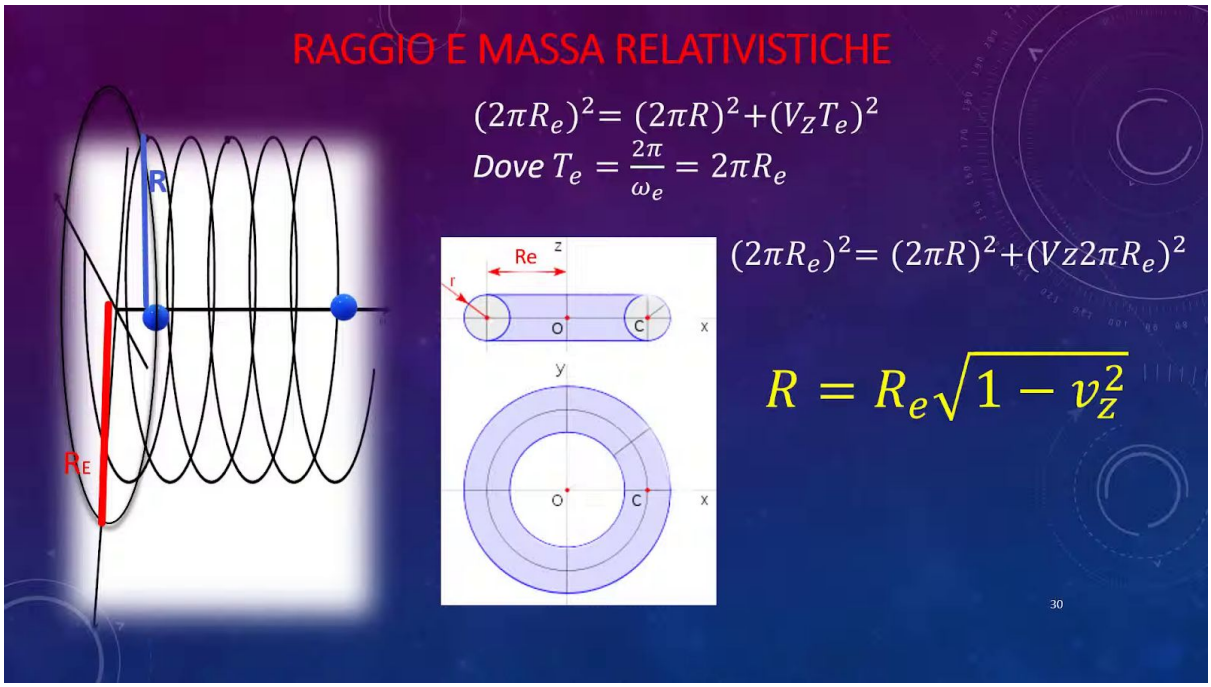
[30:49] Ecco: in questa diapositiva viene ripreso il concetto, quindi lo spin è dunque la componente lungo il campo magnetico esterno del momento angolare dell'elettrone.



[31:04] Andiamo avanti. Adesso il modello ci consente di ricavare le leggi di Newton. Ipotizziamo che l'elettrone abbia una velocità perpendicolare al piano che contiene l'anello di corrente. Quindi, se questo è un sistema di riferimento in cui abbiamo gli assi x, y e z, il piano xy contiene l'anello di corrente; questo anello di corrente viaggia con una velocità v_z lungo l'asse z.

[31:43] È chiaro che la sferetta di carica, se nella situazione in cui la velocità v_z è zero descrive una circonferenza, nella situazione in cui la velocità v_z è diversa da zero descriverà un percorso elicoidale. Quindi scriviamo la relazione $eA = mc$: questa è una relazione vettoriale, possiamo scriverla anche lungo l'asse z. Quindi, possiamo scrivere che eA_z è uguale a mv_z. Ma se deriviamo rispetto al tempo entrambi i membri otteniamo che $e\, dA_z/dt$ è uguale a $m\, dv_z/dt$. Ma dA_z/dt, come abbiamo detto nelle precedenti slide, altri non è se non il campo elettrico, quindi abbiamo $eE = m\, dv_z/dt$.

[32:40] Ancora, siccome il campo elettrico eE altri non è se non una forza, F è uguale a $m\, dv_z/dt$, ma dv_z/dt è la derivata della velocità lungo l'asse z, quindi l'accelerazione lungo z. E otteniamo dal modello—viene fuori in modo assolutamente naturale—la legge fondamentale della dinamica.



[33:12] Andiamo avanti. Occupiamoci adesso del raggio e della massa relativistica dell'elettrone. Ecco che abbiamo questa figura, che mostra praticamente il percorso elicoidale descritto dalla sferetta quando abbiamo una velocità lungo z, e prendiamo in esame due situazioni: la situazione della sferetta in alto è il caso a riposo—in cui praticamente non abbiamo alcuna velocità lungo z, la velocità lungo z è zero—la sferetta in basso invece è la situazione in cui abbiamo una velocità lungo z.

[33:52] Vediamo una simulazione: ecco che la sferetta in alto vedremo che descriverà una circonferenza di raggio R_e, mentre la sferetta in basso in cui ipotizziamo che ci sia una velocità lungo z, descriverà un percorso elicoidale. Nel descrivere questo percorso elicoidale che cosa succede? Che il raggio di questa elica sarà minore di R_e. Questo perché? Perché la velocità non potrà sicuramente essere maggiore rispetto a quella della luce. Quindi, in un periodo T_e, se nel caso in cui siamo fermi, nel caso di $V_z = 0$, la sferetta descrive una circonferenza $2\pi R_e$, quando io do` una velocità V_z diversa da zero, lo spazio percorso nell'elica dovrà comunque essere uguale a quella a riposo, perché altrimenti se così non fosse avremmo una velocità superiore a quella della luce, e non è possibile.

[35:14] Vediamo un attimino l'animazione. Ecco: vediamo la sferetta che descrive una circonferenza di raggio R_e, mentre la sferetta che ha una velocità lungo z descrive il suo percorso elicoidale, eccolo qua.

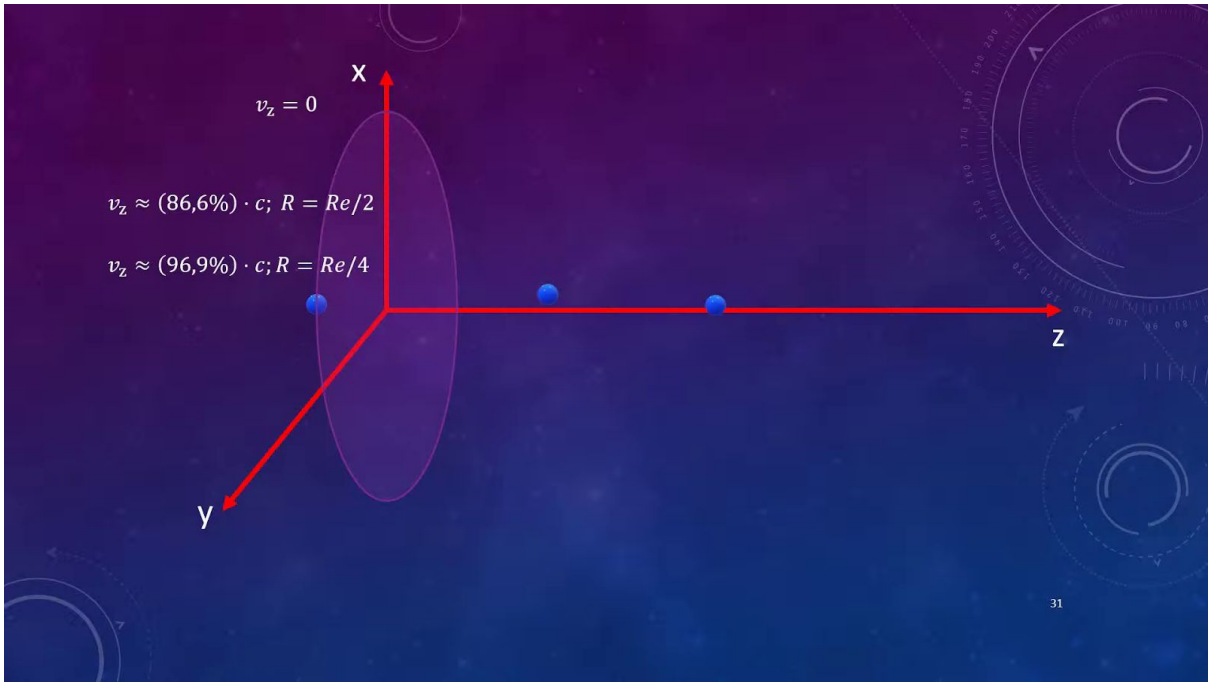
[35:32] E qui abbiamo ancora un disegno praticamente dell'elettrone, del toroide nelle varie visioni; e adesso scriviamo le equazioni. Cosa abbiamo detto? Che sostanzialmente a riposo, in un periodo T_e lo spazio percorso deve essere $(2\pi R_e)(2\pi R_e)$. Ma, mentre la sferetta si sposta lungo z percorre in un periodo T_e intanto $2\pi r$, dove r è il raggio relativistico; più abbiamo una componente dello spostamento che è $V_z T_e$.

[36:10] Siccome gli spostamenti si compongono come vettori, varrà una relazione in cui compaiono i quadrati di queste quantità. Quindi $(2\pi R_e)^2$ sarà uguale a $(2\pi R)^2$ con R

relativistico senza il pedice e, più $(V_z T_e)^2$. Ma T_e è $2\pi/\omega_e$, ma ω_e è $1/R_e$, quindi $2\pi R_e$. Sostituendo T_e nella prima relazione otteniamo quest'altra relazione, e risolvendo rispetto ad R otteniamo che il raggio relativistico è uguale al raggio a riposo per la radice di $1\text{-}v_z^2$.

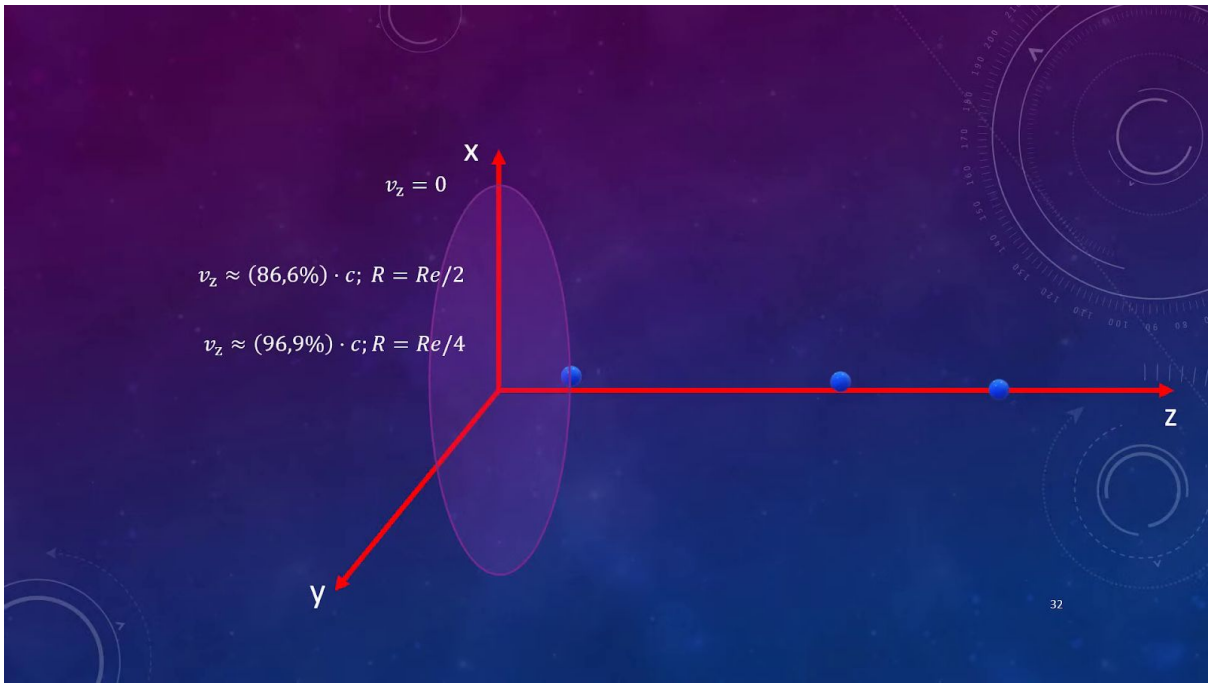
[36:55] Questo risultato è molto importante. Perché? Cosa ci dice questo risultato? Intanto siamo nelle unità naturali. Quando V_z è prossimo a 1, il che vuol dire che il rapporto V_z/c nelle unità MKS è prossimo a 1—quindi che la velocità V_z è prossima a quella della luce—il coefficiente sqrt($1\text{-}v_z^2$) tende a zero. Quindi, la quantità R_e moltiplicata per una quantità che tende zero tenderà a zero anch'essa.

[37:33] Il raggio relativistico tende a zero. Quindi, se io aumento la velocità V_z ottengo che il raggio dell'elica tende a zero. Quindi, quest'elica si allunga come una molla si allunga; ma si schiaccia, cioè il raggio diventa piccolo.



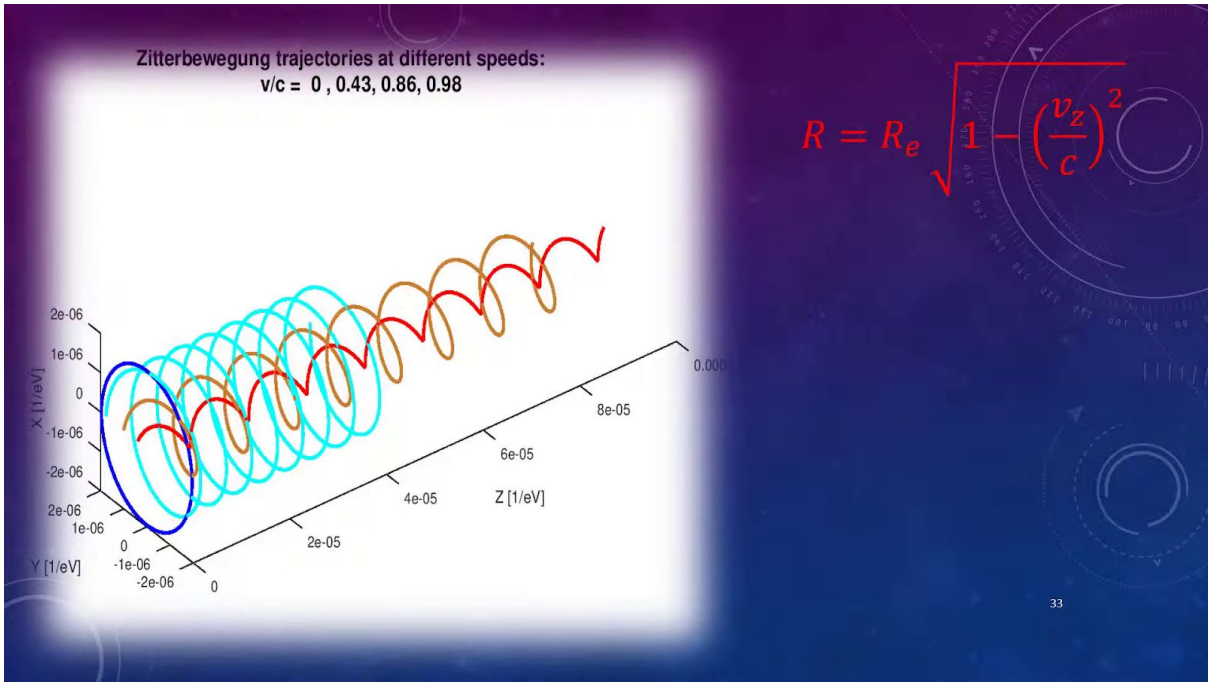
[37:55] Andiamo avanti. Qui abbiamo un'altra simulazione, abbiamo il sistema xyz degli assi cartesiani e consideriamo tre distinte situazioni. Nella situazione in alto abbiamo V_z = 0, quindi un caso statico sostanzialmente. Poi abbiamo un caso in cui il raggio relativistico si riduce ad essere $R_e/2$, cioè il raggio del caso statico diviso 2, e questo accade a conti fatti quando la velocità V_z è circa l'86.6% rispetto alla velocità della luce. E ancora, la situazione in cui il raggio relativistico si riduce ad essere $R_e/4$, cioè ¼ rispetto al raggio R_e, e questo accade quando la velocità V_z è 96.6% rispetto alla velocità della luce.

[38:57] Vediamo le simulazioni. Quindi questa è la simulazione statica, caso statico; caso $R = R_e/2$; caso $R = R_e/4$. Andiamo avanti.



[39:20] Abbiamo qui un'altra simulazione, in cui sostanzialmente ci sono le stesse situazioni, solo che stavolta vedremo il caso statico a parte; e poi i due casi dinamici in cui la sferetta ha una velocità V_z, li vedremo insieme, quindi vedremo le due eliche formarsi insieme. Ovviamente quella di $R_e/4$ ha un raggio minore ed è più lunga. Quindi vediamo l'animazione.

[39:50] Ecco qua. E ora abbiamo l'altra; le altre due simultanee. Bene, andiamo avanti.

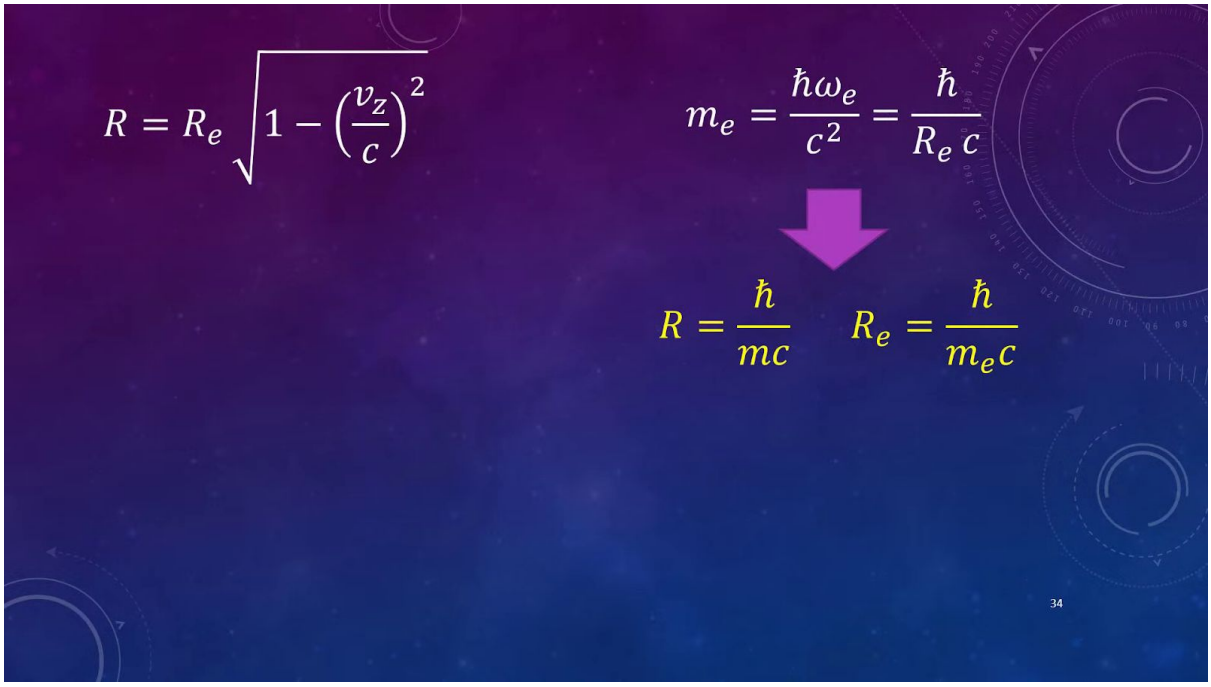


[40:04] Questo è un disegno, un grafico in cui vengono mostrate diverse eliche. Il disegno in blu è sostanzialmente il caso statico, quello in cui la velocità V_z è zero. Nel disegno in celeste abbiamo una velocità V_z che è il 43% della velocità della luce; nel disegno in arancio

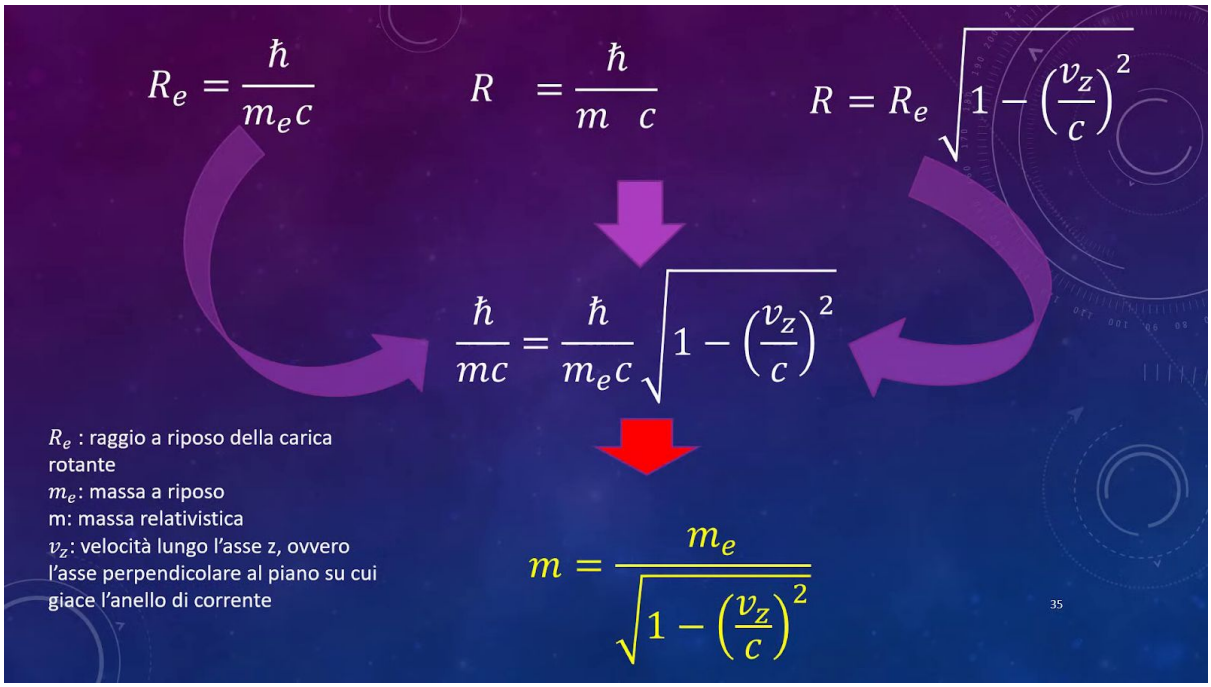
abbiamo l'86% della velocità della luce; nel disegno in rosso infine abbiamo il 98% della velocità della luce.

[40:41] C'è da dire che anche in questo caso l'asse z è contratto: cioè non è in scala, perché altrimenti praticamente queste eliche dovrebbero essere notevolmente più lunghe. Però per ragioni di spazio ovviamente è stato contratto l'asse z in maniera tale da rappresentarle. Bene, andiamo avanti.

[41:09] Qui abbiamo l'espressione del raggio, stavolta nel caso delle unità MKSA, quindi $R = R_e$ sqrt(1 - $(V_z/c)^2$).



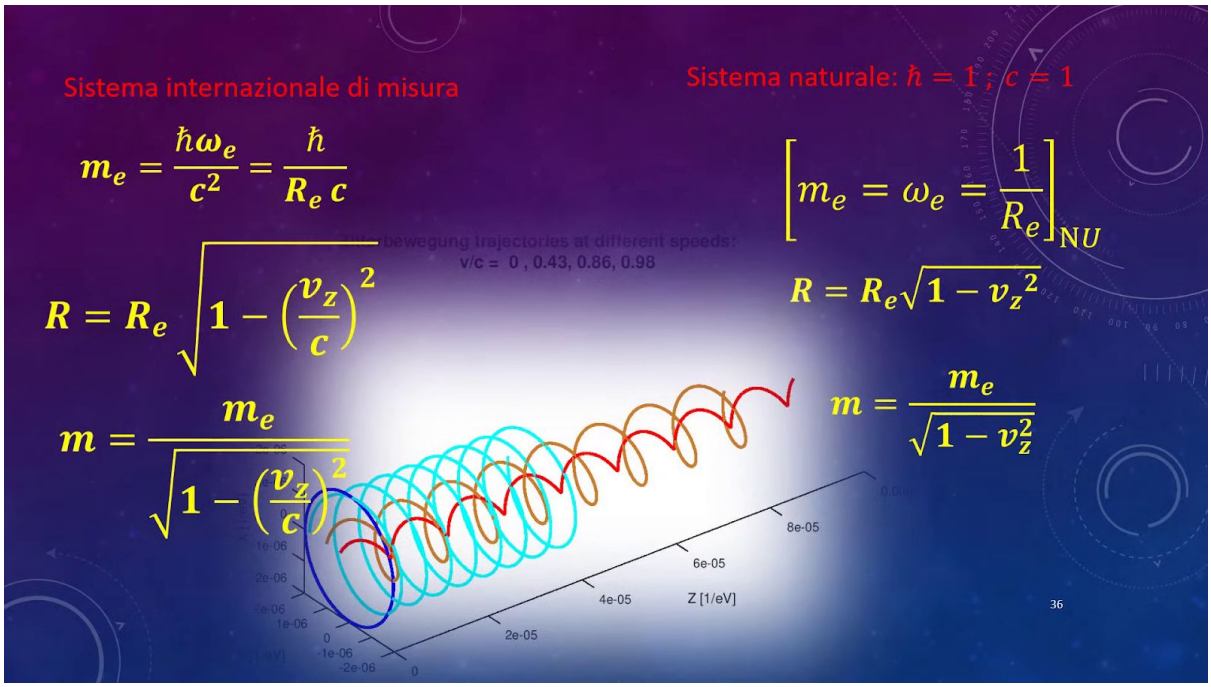
[41:25] Adesso riprendiamo un attimino le relazioni di m_e del caso in cui ci riferiamo alle unità MKSA. Avevamo visto che m_e è $\hbar\omega_e/c^2$, ma è anche $\hbar/R_e c$. Andiamo avanti. Da queste due relazioni risolvo rispetto ad R_e: ottengo che $R_e = \hbar/m_e c$, ma in generale R sarà uguale a $\hbar/mc$, dove R è uguale a R_e sqrt(1 - $(V_z/c)^2$).



[42:25] Allora, qui abbiamo ancora la relazione $R_e = \hbar/m_e c$; $R = \hbar/mc$; ed $R = R_e$ sqrt(1 - $(V_z/c)^2$). Se sostituiamo la prima e la seconda relazione nella terza otteniamo la relazione $\hbar/mc = \hbar/m_e c$ sqrt(1 - $(V_z/c)^2$). Ma risolvendo quest'ultima equazione rispetto ad m otteniamo che la massa è uguale a m_e/sqrt(1 - $(V_z/c)^2$), che è l'espressione della massa relativistica.

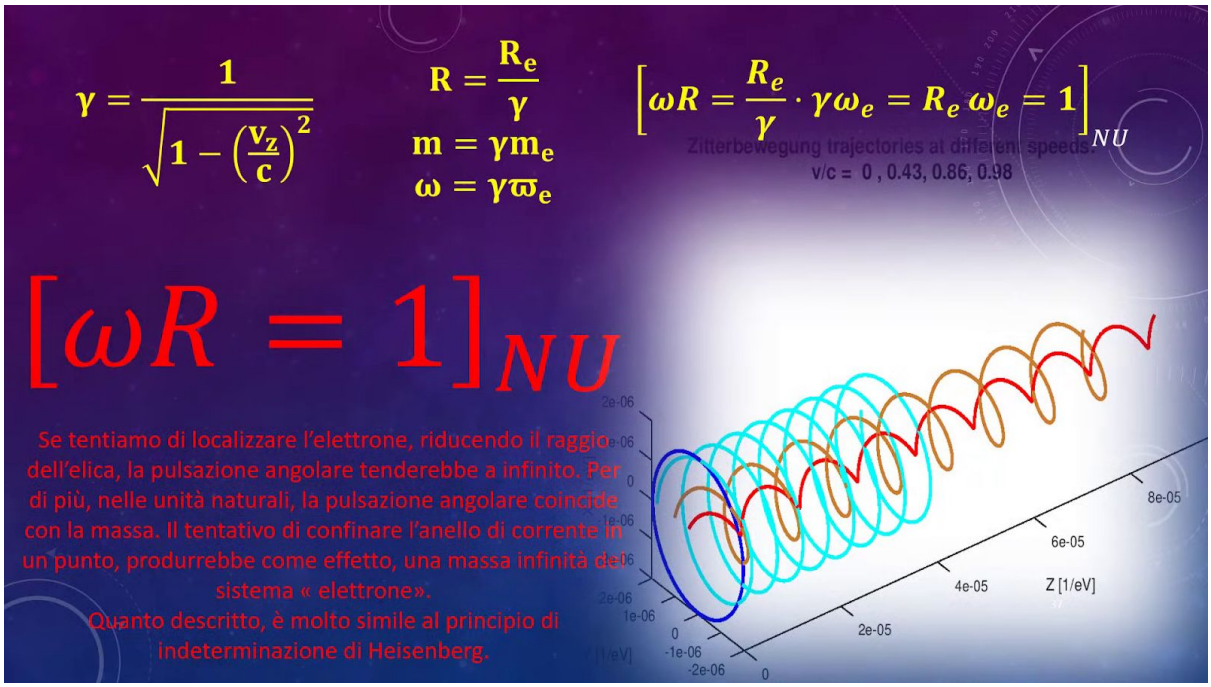
[43:14] Quindi: se noi vogliamo conferire una velocità a questa particella lungo l'asse z e questa velocità è prossima a quella della luce, il rapporto V_z/c tende ad 1; il denominatore tende a zero e la massa tende a infinito, in pieno accordo con quanto detto dalla relatività di Einstein. Andiamo avanti.

[43:44] Ecco qui: dice che Re è il raggio a riposo della carica; m_e la massa a riposo; m è la massa relativistica; v_z è la velocità lungo l'asse z, ovvero quell'asse perpendicolare al piano su cui giace l'anello di corrente.



[44:05] Quindi, passiamo in rassegna quali sono le equazioni di questo modello. Nel sistema internazionale di misura abbiamo che la massa è uguale a $\hbar\omega_e/c^2 = \hbar/R_e c$. R relativistico è uguale a R_e sqrt(1 - $(V_z/c)^2$), e ancora m relativistico è uguale a m_e/sqrt(1 - $(V_z/c)^2$). Nel sistema naturale, in cui le costanti $\hbar$ e c sono unitarie, con tutto quello che comporta e che abbiamo visto, abbiamo che $m_e = \omega_e = 1/R_e$ (tra parentesi, NU—unità naturali), ancora abbiamo che $R = R_e$ sqrt(1 - v_z^2), e ancora $m = m_e$/sqrt(1 - v_z^2).

[45:09] E qui abbiamo ancora la figura che avevamo precedentemente delle varie eliche, ciascuna delle quali corrisponde ad una velocità V_z diversa. Ancora una volta, facciamo osservare che l'asse z è contratto, perché altrimenti queste eliche avrebbero avuto una lunghezza notevolmente maggiore.



[45:37] Allora, se poniamo la costante γ, se poniamo la quantità 1/sqrt(1 - $(V_z/c)^2$) uguale a γ, le equazioni precedentemente viste diverranno $R = R_e/\gamma$; $m = \gamma m_e$; e ancora $\omega = \gamma\omega_e$. Ma se a questo punto noi calcoliamo il prodotto ωR, se sostituiamo al posto di ω, $\gamma\omega_e$ e al posto di R, R_e/γ, viene $\omega R = R_e/\gamma\ \gamma\omega_e$. Gamma e gamma si semplificano e risulta, viene fuori $R_e\omega_e$. Quindi ωR è uguale a $R_e\omega_e$, che in unità naturali vale 1, perché ω_e è proprio $1/R_e$.

[46:42] Ma questo è un risultato molto importante. Perché è un risultato molto importante? Perché ci dice che ωR in unità naturali vale 1. Cosa significa questo? Se noi aumentiamo la velocità della particella lungo z e quindi V_z, diminuisce il raggio dell'elica, quindi questa particella tende sempre più, tra virgolette, a schiacciarsi lungo l'asse z e a diventare simile ad una particella puntiforme che si muove lungo l'asse z. Ma di contro cosa succede? Succede che la pulsazione tende a diventare infinitamente grande.

[47:24] Ma la pulsazione, in unità naturali altri non è se non la massa. Quindi la massa tende a diventare infinitamente grande. Allora cosa possiamo dire? Che se noi tentiamo di localizzare l'elettrone riducendo il raggio dell'elica la pulsazione angolare tenderebbe a infinito. Ma nelle unità naturali la pulsazione angolare coincide con la massa, quindi un tentativo di confinare l'anello di corrente in un punto produrrebbe come effetto una massa infinita nel sistema elettrone. Quanto descritto è molto simile al principio di indeterminazione di Heisenberg.

[48:10] Andiamo ancora avanti ed esaminiamo l'elettrone in seno all'atomo. Allora, il nostro obiettivo è quello di scoprire se in seno all'atomo l'approssimazione di carica puntiforme sia plausibile. A tale scopo calcoliamo il volume del toroide descritto dalla nostra sferetta, e calcoliamo il volume dell'atomo di idrogeno per esempio, considerando il suo raggio classico: il raggio di Bohr, circa 53 picometri.

[48:49] Quindi, questo è il nostro toroide. Qui al solito abbiamo un'altra immagine, ci fa vedere il raggio R_e circa 0.38 picometri e il raggio classico r che è nell'ordine di 10^{-15} metri.

[49:09] Bene, adesso consideriamo praticamente il nostro toroide, il toroide disegnato dalla particella priva di carica che ruota alla velocità della luce. Ecco, qui abbiamo una sezione del nostro toroide in cui possiamo vedere il raggio r piccolo, il raggio classico dell'elettrone; e il raggio R_e, i famosi 0.38 pm dell'orbita. E ci proponiamo praticamente di calcolare sostanzialmente il volume di questo toroide.

[49:39] Facciamo un calcolo approssimativo in cui r lo approssimiamo a 2.81×10^{-15} m, il raggio classico dell'elettrone, e R_e 0.38×10^{-12} m, il raggio dell'anello di corrente. Il volume di un toroide, dalla geometria è noto che è $2\,\pi^2 r^2 R_e$ e a conti fatti il volume dell'elettrone a riposo verrebbe circa 6×10^{-41} m^3.

$$R_H \cong 53 \times 10^{-12} m : raggio\ classico\ per\ l'atomo\ d'idrogeno$$

Considerando un modello semplice, in cui l'atomo d'idrogeno si possa assimilare ad una sferetta avente raggio R_H, è possibile calcolare, in modo approssimativo, il volume occupato da un atomo d'idrogeno.

Si ha:

$$V_H = \frac{4}{3}\pi R_H^3 = \frac{4}{3}\pi \ \ (53 \times 10^{-12})^3 \cong 6{,}23 \times 10^{-31} m^3$$

Considerando il rapporto «$\frac{V_H}{V_{elettrone_riposo}}$» si ha:

$$\frac{V_H}{V_{elettrone_riposo}} = \frac{6{,}23 \times 10^{-31}}{6 \times 10^{-41}} \cong 10^{10}$$

L'elettrone risulterebbe circa dieci miliardi di volte più piccolo dell'intero atomo.

L'approssimazione di carica puntiforme è sicuramente plausibile.

40

[50:10] Se adesso consideriamo per l'atomo un raggio pari al raggio classico dell'atomo di idrogeno, il raggio di Bohr—circa 53 picometri—quindi considerando un modello semplice in cui l'atomo di idrogeno si possa assimilare ad una sferetta avente un raggio R_H, 53 picometri, se calcoliamo il volume che è $4/3\,\pi R^3$, otteniamo 6.23×10^{-31} m^3.

[50:39] Facendo il rapporto tra il volume dell'intero atomo di idrogeno e il volume dell'elettrone a riposo, otteniamo che è circa 10^{10}. Quindi fondamentalmente il volume dell'elettrone sarebbe ancora dieci miliardi di volte più piccolo rispetto al volume dell'intero atomo. Per cui l'approssimazione di carica puntiforme per l'elettrone in seno all'atomo anche con questo modello può andare bene. Quindi, qui c'è scritto quello che abbiamo detto, quindi l'approssimazione di carica puntiforme è plausibile.

UNA PECULIARITÀ

Il rapporto fra il raggio dell'atomo d'idrogeno ed il raggio dell'anello di corrente, è uguale al rapporto fra il raggio dell'anello di corrente stesso ed il raggio classico dell'elettrone.

$R_H \cong 52{,}9177249\ 10^{-12} m$ Raggio classico dell'atomo d'idrogeno

$R_e \cong 0{,}386159267 \times 10^{-12} m$ Raggio dell'anello di corrente

$r \cong 2{,}8179403267\ \times 10^{-15} m$ Raggio classico dell'elettrone

$$\frac{R_H}{R_e} \cong \frac{52{,}9177249\ 10^{-12} m}{0{,}386159267 \times 10^{-12} m} \cong \mathbf{137}$$

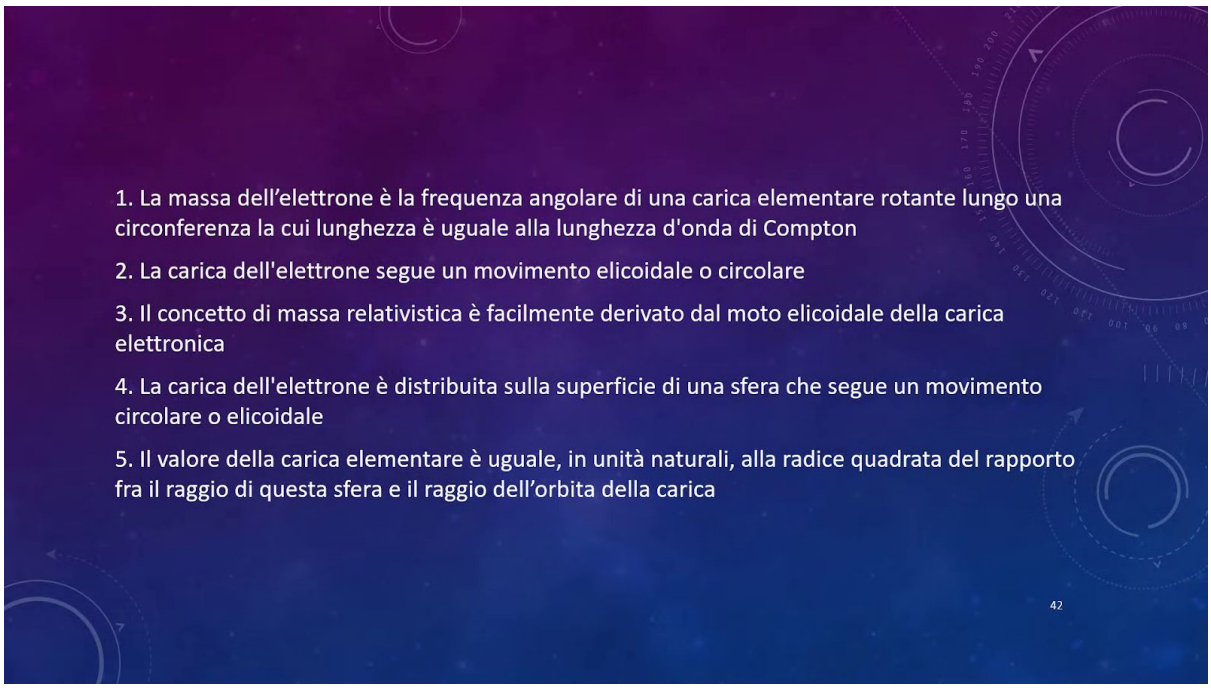
$$\frac{R_e}{r} \cong \frac{0{,}386159267 \times 10^{-12} m}{2{,}8179403267 \times 10^{-15}\ m} \cong \mathbf{137}$$

41

[51:20] Bene: adesso vedremo una peculiarità. La peculiarità è la seguente: il rapporto tra il raggio dell'atomo di idrogeno (il raggio classico quello di Bohr) e il raggio dell'anello di corrente (i famosi 0.38 picometri) è uguale al rapporto tra il raggio dell'anello di corrente stesso ed il raggio classico dell'elettrone.

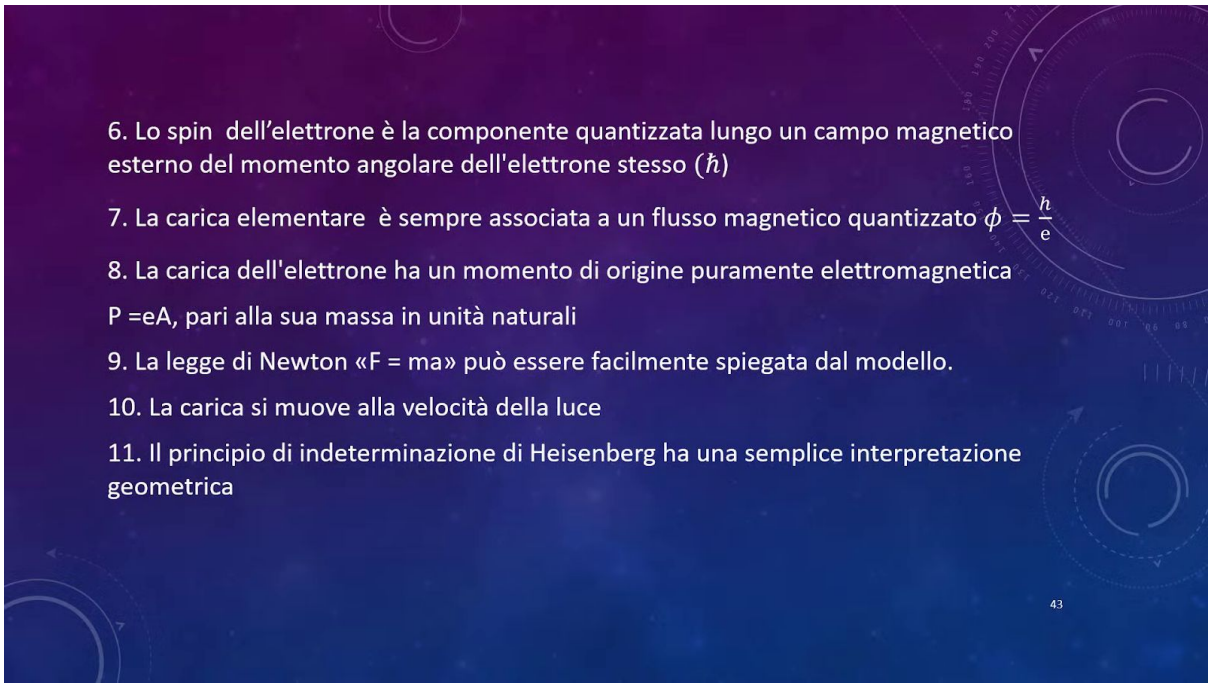
[51:42] Quindi: raggio dell'atomo di idrogeno sta al raggio dell'anello di corrente come raggio dell'anello di corrente sta al raggio classico dell'elettrone. Se consideriamo il valore del raggio classico con la precisione CODATA, quindi abbiamo una serie di cifre decimali: 52.9… × 10^{-12} m; anche il valore di R_e lo prendiamo con precisione CODATA; il valore di r lo prendiamo pure con precisione CODATA. Facendo il rapporto R_H/R_e otteniamo il numero 137.

[52:19] Ma lo stesso identico numero lo otteniamo facendo il rapporto R_e/r, quindi R_H sta a R_e come R_e sta ad r. L'inverso di questo numero è detto costante di struttura fine.



[52:42] Allora: in questa diapositiva passeremo in rassegna le peculiarità del nostro modello, del modello che abbiamo esaminato. Allora, in primis abbiamo che la massa dell'elettrone è la frequenza angolare di una carica elementare rotante lungo una circonferenza, la cui lunghezza è uguale alla lunghezza d'onda di Compton;

[53:09] La carica dell'elettrone segue un movimento elicoidale o circolare; il concetto di massa relativistica è facilmente derivato dal moto elicoidale della carica; la carica dell'elettrone è distribuita sulla superficie di una sfera che segue un movimento circolare o elicoidale; il valore della carica elementare è uguale—in unità naturali—alla radice quadrata del rapporto tra il raggio di questa sfera e il raggio dell'orbita della carica.



[53:53] Bene, continuiamo col passare in rassegna in punti. Il punto 6 che è lo spin dell'elettrone, altri non è se non la componente quantizzata lungo un campo magnetico esterno del momento angolare dell'elettrone stesso, $\hbar$ quindi. L'elettrone ha un momento angolare $\hbar$; la componente di questo momento angolare lungo un campo magnetico esterno con cui praticamente forma l'asse di rotazione dell'anello di corrente attorno a un angolo che può essere $\pi/3$ e $2/3\,\pi$, è proprio più o meno $\hbar$.

[54:30] Quindi lo spin è la componente quantizzata lungo un campo magnetico esterno del momento angolare dell'elettrone stesso: $\hbar$.

[54:38] Ancora: alla carica elementare è sempre associato un flusso magnetico pari al rapporto tra la costante di Planck e la carica stessa; la carica dell'elettrone ha un momento di origine puramente elettromagnetica, quindi ha una quantità di moto di origine elettromagnetica eA che in unità naturali è pari alla massa. Perché? Perché ricordiamo che eA è uguale $m_e c$ e in unità naturali c è uguale ad 1.

[55:09] Ancora, la legge di Newton $F = ma$, la ben nota legge fondamentale della dinamica, può essere facilmente spiegata dal modello. Ancora: la carica si muove alla velocità della luce, e ancora, il principio di indeterminazione di Heisenberg ha una semplice interpretazione geometrica.

[55:34] Bene. Io mi auguro che questo video vi sia piaciuto. Se ci sono state delle disattenzioni, delle imprecisioni, mi scuso; comunque mi auguro che voi abbiate apprezzato il video e quindi vi auguro una buona giornata. Grazie dell'ascolto.